SOLUZIONI APPELLO LAUREANDI DEL CORSO AC310
22 FEBBRAIO 2017

ESERCIZIO 1 (5 punti)
Dimostrare che la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^2}$$
definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e determinare i suoi poli e i rispettivi ordini.

Soluzione:
Si veda l'esercizio 1(b) del Capitolo V.3 del libro del Lang e le sue soluzioni nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 2 (5 punti)
Calcolare l'integrale della funzione $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$ lungo la circonferenza di raggio 1 e centro 1.

Soluzione:
Si veda uno degli Esempi del Capitolo VI.1 del libro del Lang.

ESERCIZIO 3 (5 punti)
Trovare lo sviluppo in serie di potenze della funzione $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ nel punto 0 e discutere il raggio di convergenza di questa serie.

(Cenno di) Soluzione:
Usando la serie geometrica, lo sviluppo in serie è
$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}.$$
Siccome le singolarità di $f(z)$ sono in i e $-i$, il raggio di convergenza della serie è 1.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Sia U un aperto connesso contenuto in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) U è semplicemente connesso.
(ii) Esiste un logaritmo su U (cioè una funzione olomorfa $\log : U \to \mathbb{C}$ tale che $e^{\log(z)} = z$ per ogni $z \in U$).
(iii) Esiste una primitiva della funzione $1/z$ su U.

Soluzione:
(ii)$\Rightarrow$ (i): supponiamo che esista $\log z$ su U e vogliamo dimostrare che U è semplicemente connesso. Siccome $e^{\log z} = z$ per ogni $z \in U$, allora passando ai gruppi fondamentali otteniamo che la composizione
$$\pi_1(U, z_0) \xrightarrow{(\log z)_*} \pi_1(\mathbb{C}, \log z_0) \xrightarrow{(e^z)_*} \pi_1(U, z_0)$$
è l'identità, per ogni punto base $z_0 \in U$. Siccome $\pi_1(\mathbb{C}, \log z_0) = 0$, questo può accadere se e solo se $\pi_1(U, z_0) = 0$, cioè se U è semplicemente connesso (usando il fatto che U è connesso).

(i)$\Rightarrow$ (iii): la funzione $1/z$ é olomorfa su $U \subset \mathbb{C}^*$ e U è connesso e semplicemente connesso per ipotesi. Dunque dal Teorema di Cauchy di invarianza omotopica, segue che la funzione

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} \frac{1}{z} dz$$

dove l'integrale è calcolato rispetto ad un cammino da un punto base z_0 (arbitrariamente scelto) a z, è ben definita (cioè non dipende dal cammino scelto) ed è una primitiva (olomorfa) di $1/z$.

(iii)$\Rightarrow$ (ii): la dimostrazione di questa implicazione è contenuta nell'Esempio a pagina 120-121 della Sezione III.6 del libro di Lang.

ESERCIZIO 5 (teorico) (3 punti per ogni dimostrazione)

Esporre le dimostrazioni che conosci del teorema fondamentale dell'algebra usando l'analisi complessa.