SOLUZIONI APPELLO X DEL CORSO AC310
(1 SETTEMBRE 2016)

ESERCIZIO 1 (5 punti)

Calcolare l'integrale della funzione $f(z) = \dfrac{1+z}{1-\sin z}$ lungo la circonferenza di raggio 8 e centro l'origine.

Soluzione: Si veda Esercizio VI.1.26(e) del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 2 (6 punti)

(i) Trovare l'espansione in serie di Laurent della funzione $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$ nella corona circolare $1 < |z| < 2$.

(ii) Qual è il più grande aperto di convergenza della serie di Laurent trovata nel punto precedente?

Soluzione:

(i) Si veda Esercizio V.2.12 del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

(ii) La funzione f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$. Dunque la serie di Laurent converge sulla più grande corona circolare contenuta in $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$, che è la corona circolare $1 < |z| < +\infty$.

ESERCIZIO 3 (8 punti) Sia f una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ tale che

$$\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty.$$

Dimostrare che f è una funzione razionale.

Soluzione: Si veda Esercizio V.3.9 del libro di Lang e la soluzione nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 4 (8 punti) Sia U un aperto connesso contenuto in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(i) Dimostrare che se esiste un logaritmo su U (cioè una funzione olomorfa $\log : U \to \mathbb{C}$ tale che $e^{\log(z)} = z$ per ogni $z \in U$) allora U è semplicemente connesso.

(ii) Dimostrare che se U è semplicemente connesso allora esiste una primitiva $F : U \to \mathbb{C}$ della funzione $1/z$ su U.

(iii) Dimostrare che se esiste una primitiva della funzione $1/z$ su U allora esiste un logaritmo su U.

Soluzione:

(a) Supponiamo che esista $\log z$ su U e vogliamo dimostrare che U è semplicemente connesso. Siccome $e^{\log z} = z$ per ogni $z \in U$, allora passando ai gruppi fondamentali otteniamo che la composizione

$$\pi_1(U, z_0) \xrightarrow{(\log z)_*} \pi_1(\mathbb{C}, \log z_0) \xrightarrow{(e^z)_*} \pi_1(U, z_0)$$

è l'identità, per ogni punto base $z_0 \in U$. Siccome $\pi_1(\mathbb{C}, \log z_0) = 0$, questo può accadere se e solo se $\pi_1(U, z_0) = 0$, cioè se U è semplicemente connesso (usando il fatto che U è connesso).

(b) La funzione $1/z$ é olomorfa su $U \subset \mathbb{C}^*$ e U è connesso e semplicemente connesso per ipotesi. Dunque dal Teorema di Cauchy di invarianza omotopica, segue che la funzione

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} \frac{1}{z} dz$$

dove l'integrale è calcolato rispetto ad un cammino da un punto base z_0 (arbitrariamente scelto) a z, è ben definita (cioè non dipende dal cammino scelto) ed è una primitiva (olomorfa) di $1/z$.

(c) La dimostrazione di questa implicazione è contenuta nell'Esempio a pagina 120-121 della Sezione III.6 del libro di Lang.

ESERCIZIO 5 (teorico) (8 punti)

(i) (4 punti) Calcolare il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{C}$ (con dimostrazione).

(ii) (4 punti) Calcolare il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{D}$, dove $\mathbb{D}$ è il disco unitario di $\mathbb{C}$ (con dimostrazione).