SOLUZIONI DELLA PRIMA PROVA IN ITINERE DEL CORSO AC310
11 NOVEMBRE 2015

ESERCIZIO 1 (6 punti)
Sia $\sum f : U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa con U aperto connesso di $\mathbb{C}$. Dimostrare che se l'immagine di f è contenuta in $\mathbb{R}$ allora f è costante.
[Suggerimento: Usare le equazioni di Cauchy-Riemann.]

Soluzione:
Scriviamo la funzione f come $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ con u e v funzioni reali. Siccome f è olomorfa, allora u e v sono funzioni C^1 e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Siccome per ipotesi f assume valori reali, allora v è identicamente zero. Dunque le equazioni di Cauchy-Riemann implicano che $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$ per ogni $x + iy \in U$. Siccome U è connesso, ne deduciamo che u è costante, e dunque anche f sarà costante.

ESERCIZIO 2 (12 punti)
Si consideri la serie $F(T) := \sum_n \frac{T^n}{n^2} \in \mathbb{C}[[T]]$.

(i) (4 punti) Dimostrare che il raggio di convergenza di $F(T)$ è 1.
(ii) (4 punti) Dimostrare che F converge ad una funzione continua f sulla chiusura del disco unitario $\overline{D_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.
(iii) (4 punti) Dimostrare che esiste almeno un punto del bordo del disco unitario dove f non è olomorfa.

Soluzione:
Per i punti (i) e (ii), si vedi l'esercizio II.2.6 del libro di Lang e la sua soluzione nel libro di Shakarchi.
Punto (iii): se per assurdo f fosse olomorfa in ogni punto del del bordo del disco unitario $D_1(0)$, allora f sarebbe olomorfa nel disco $D_{1+\epsilon}(0)$ di raggio $1+\epsilon$ per un certo $\epsilon > 0$. Allora, dalla formula di Cauchy per lo sviluppo in serie di una funzione olomorfa seguirebbe che f ammette uno sviluppo in serie in 0 con raggio di convergenza maggiore o uguale a $1+\epsilon$, il che contraddice il punto (i).

ESERCIZIO 3 (12 punti)
Sia U un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e sia $f : U \to \mathbb{C}$ *un logaritmo complesso* su U, cioè una funzione olomorfa su U tale che $e^{f(z)} = z$ per ogni $z \in U$.

(i) (4 punti) Dimostrare che $f'(z) = \frac{1}{z}$ per ogni $z \in U$.
(ii) (4 punti) Dimostrare che se $g : U \to \mathbb{C}$ è un altro logaritmo complesso su U allora esiste un numero intero k tale che $g(z) = f(z) + 2\pi ik$ per ogni $z \in U$.
(iii) (4 punti) Dimostrare che se $U = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ allora non esiste nessun logaritmo complesso su U.

Soluzione:

(i) Derivando l'identità $e^{f(z)} = z$ usando la regola della derivazione per catena, otteniamo
$$1 = (z)' = (e^{f(z)})' = e^{f(z)} f'(z) = z f'(z),$$
o equivalentemente $f'(z) = \dfrac{1}{z}$.

(ii) Per il punto (i), f e g hanno la stessa derivata e dunque, siccome U è connesso, $g = f + c$ per qualche costante $c \in \mathbb{C}$. Ma imponendo che $e^{g(z)} = z = e^{f(z)}$ per ogni $z \in U$ si ottiene
$$z = e^{g(z)} = e^{f(z)+c} = e^{f(z)} e^c = z e^c \Rightarrow e^c = 1 \Rightarrow c = 2\pi i k \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Abbiamo visto a lezione che se C è una circonferenza in $\mathbb{C}^*$ centrata in 0 e percorsa in senso antiorario, allora $\displaystyle\int_C \frac{1}{z} = 2\pi i$. Questo implica che la funzione $\dfrac{1}{z}$ non ammette una primitiva su $\mathbb{C}^*$ per il criterio di esistenza di un primitiva, e quindi che non esiste un logaritmo complesso su $\mathbb{C}^*$ per il punto (i).

ESERCIZIO 4 (teorico) (8 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza locale di una primitiva per una funzione olomorfa.

Soluzione: Si veda Lang, Capitolo III.3.