SOLUZIONI DELLA SECONDA PROVA IN ITINERE DEL CORSO AC310 DEL 12 GENNAIO 2016

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e determinare i suoi poli e i rispettivi ordini.

Soluzione: Si veda l'esercizio 1 del Capitolo V.3 del libro del Lang e la sua soluzione nel libro di Shakarchi.

ESERCIZIO 2 (teorico) (8 punti)
Enunciare e dimostrare il teorema dei residui, sia nella versione locale che in quella globale (assumendo il teorema dei Cauchy sull'invarianza omologica).

Soluzione: Si veda Lang, Capitolo VI.1, Teoremi 1.1 e 1.2.

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Siano $z^1 = (z_0^1 : z_1^1)$, $z^2 = (z_0^2 : z_1^2)$ e $z^3 = (z_0^3 : z_1^3)$ tre punti distinti di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Dimostrare che esiste un'unica trasformazione lineare fratta $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ tale che $F(z^1) = (0 : 1)$, $F(z^2) = (1 : 0)$ e $F(z^3) = (1 : 1)$.

Soluzione: Si veda Lang, Capitolo VII.5, Teorema 5.4.

ESERCIZIO 4 (12 punti)
Sia $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un reticolo e siano $\mathfrak{p}_\Lambda(z)$ la funzione di Weierstrass associata a Λ e $\mathfrak{p}'_\Lambda(z)$ la sua derivata. Per ogni intero $r > 2$, sia $G_r(\Lambda) := \displaystyle\sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^r} \in \mathbb{C}$. Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned}\Phi : \frac{\mathbb{C}}{\Lambda} - \{[0]\} &\longrightarrow \mathcal{C}_\Lambda := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = 4x^3 - 60G_4(\Lambda)x - 140G_6(\Lambda)\} \\ [z] &\mapsto (\mathfrak{p}_\Lambda(z), \mathfrak{p}'_\Lambda(z)),\end{aligned}$$

è ben definita, iniettiva e suriettiva.
[Suggerimento: Utilizzare le proprietà di $\mathfrak{p}_\Lambda(z)$ e $\mathfrak{p}'_\Lambda(z)$ viste a lezione...]

Soluzione: Dividiamo la dimostrazione in tre parti, utilizzando liberamente le proprietà di $\mathfrak{p}_\Lambda$ e $\mathfrak{p}'_\Lambda$ viste a lezione.

(1) Φ *è ben definita.*
Infatti $\mathfrak{p}_\Lambda$ e $\mathfrak{p}'_\Lambda$ sono olomorfe su $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ e sono periodiche rispetto a Λ, dunque la mappa Φ è ben definita da $\frac{\mathbb{C}}{\Lambda} - \{[0]\}$ a $\mathbb{C}^2$. L'immagine di Φ è contenuta in $\mathcal{C}_\Lambda$ perché $\mathfrak{p}_\Lambda$ e $\mathfrak{p}'_\Lambda$ soddisfano la relazione $(\mathfrak{p}'_\Lambda)^2 = 4(\mathfrak{p}_\Lambda)^3 - 60G_4(\Lambda)\mathfrak{p}_\Lambda - 140G_6(\Lambda)$.

(2) Φ *è inettiva.*

Siano z_1 e z_2 due elementi di $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ tali che $\Phi([z_1]) = \Phi([z_2])$, cioè tali che $\mathfrak{p}_\Lambda(z_1) = \mathfrak{p}_\Lambda(z_2)$ e $\mathfrak{p}'_\Lambda(z_1) = \mathfrak{p}'_\Lambda(z_2)$, e dimostriamo che $[z_1] = [z_2]$. Distinguiamo due casi:

- <u>Caso 1:</u> $2[z_1] = [0]$.
  In questo caso sappiamo che la funzione

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{C}}{\Lambda} - \{[0]\} &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ [z] &\mapsto \mathfrak{p}_\Lambda(z) - \mathfrak{p}_\Lambda(z_1) \end{aligned} \tag{0.1}$$

  ha un unico zero in $[z_1]$ (con molteplicità 2). Dunque siccome z_2 è uno zero della funzione (0.1) per ipotesi, concludiamo che $[z_2] = [z_1]$.
- <u>Caso 2:</u> $2[z_1] \neq [0]$.
  In questo caso sappiamo che la funzione (0.1) ha due zeri (di molteplicità uno) in $[z_1]$ e $[-z_1]$. Siccome z_2 è uno zero della funzione (0.1) per ipotesi, concludiamo che $[z_2] = [z_1]$ oppure che $[z_2] = [-z_1]$. Supponiamo per assurdo che si verifichi la seconda possibilità. Allora, usando che $\mathfrak{p}'_\Lambda(z_1) = \mathfrak{p}'_\Lambda(z_2)$ per ipotesi e che $\mathfrak{p}'_\Lambda$ è una funzione dispari e Λ-periodica, otteniamo che

$$\mathfrak{p}'_\Lambda(z_1) = \mathfrak{p}'_\Lambda(z_2) = \mathfrak{p}'_\Lambda(-z_1) = -\mathfrak{p}'_\Lambda(z_1).$$

  Questo implica che $\mathfrak{p}'_\Lambda(z_1) = 0$, il che è un assurdo perché gli unici zeri di $\mathfrak{p}'_\Lambda$ nel toro complesso $\frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$ sono i punti di due torsione e $2[z_1] \neq [0]$ perché siamo nel Caso 2. Dunque non rimane che la prima possibilità, e cioè $[z_1] = [z_2]$.

(3) Φ *è suriettiva.*

Sia $(x, y) \in \mathcal{C}_\Lambda$ e dimostriamo che esiste $[z] \in \frac{\mathbb{C}}{\Lambda} - \{[0]\}$ tale che $\Phi([z]) = (x, y)$, cioè tale che $\mathfrak{p}_\Lambda(z) = x$ e $\mathfrak{p}'_\Lambda(z) = y$. Consideriamo la funzione ellittica rispetto a Λ:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \Lambda &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ z &\mapsto \mathfrak{p}_\Lambda(z) - x. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Tale funzione ha un polo in 0 e dunque, per le proprietà delle funzione ellittiche, deve avere almeno uno zero in $\mathbb{C} \setminus \Lambda$. Fissiamo un tale zero che chiameremo w. Consideriamo ora il punto $(\mathfrak{p}_\Lambda(w), \mathfrak{p}'_\Lambda(w)) \in \mathcal{C}_\Lambda$. Scrivendo l'equazione che definisce $\mathcal{C}_\Lambda$ per i punti (x, y) e $(\mathfrak{p}_\Lambda(w), \mathfrak{p}'_\Lambda(w))$ e usando che $\mathfrak{p}_\Lambda(w) = x$ per costruzione, otteniamo che $y^2 = \mathfrak{p}'_\Lambda(w)^2$, e dunque avremo che $y = \mathfrak{p}'_\Lambda(w)$ oppure che $y = -\mathfrak{p}'_\Lambda(w)$.

Se si verifica la prima possibilità, allora $\Phi([w]) = (\mathfrak{p}_\Lambda(w), \mathfrak{p}'_\Lambda(w)) = (x, y)$ e abbiamo concluso.

Se si verifica la seconda possibilità, allora consideriamo l'elemento $z := -w$. Siccome $\mathfrak{p}_\Lambda$ è una funzione pari mentre $\mathfrak{p}'_\Lambda$ è una funzione dispari, allora otteniamo che:

$$\Phi([z]) = (\mathfrak{p}_\Lambda(z), \mathfrak{p}'_\Lambda(z)) = (\mathfrak{p}_\Lambda(-w), \mathfrak{p}'_\Lambda(-w)) = (\mathfrak{p}_\Lambda(w), -\mathfrak{p}'_\Lambda(w)) = (x, y),$$

e concludiamo anche in questo caso.