Nome candidato:

APPELLO A DEL CORSO DI ANALISI COMPLESSA
22 GIUGNO 2022

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (6 punti)
Si consideri la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto |z|^2 - \overline{z}^2. \end{aligned}$$

Usando le equazioni di Caucly-Riemann, determinare i punti di $\mathbb{C}$ in cui f è olomorfa.

ESERCIZIO 2 (6 punti)
Si consideri la funzione razionale

$$f(z) := \frac{1}{z(z-1)(z-2)}.$$

Si determini lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$ nelle seguenti corone circolari:
(A) $0 < |z| < 1$;
(B) $1 < |z| < 2$;
(C) $2 < |z|$.

ESERCIZIO 3 (6 punti)
Dato $\alpha \in \mathbb{C}$, calcolare

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{i\alpha z}}{(z-z_0)^2} dz$$

per
(A) $|z_0| > 1$;
(B) $|z_0| < 1$.

ESERCIZIO 4 (6 punti)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx.$$

[Suggerimento: integrare la funzione integranda (come funzione complessa) lungo la curva chiusa formata dal segmento $[-R, R]$ e dalla semicirconferenza centrata in 0 e di raggio R, con $R \to +\infty$.]

ESERCIZIO 5 (9 punti)
Sia U un aperto connesso di $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:
(A) Esiste una funzione L olomorfa su U tale che $e^{L(z)} = z$ per ogni $z \in U$.
(B) Esiste una funzione P olomorfa su U tale che $P'(z) = \frac{1}{z}$ per ogni $z \in U$.
(C) Vale che

$$\mathrm{Im}(\pi_1(U, b) \to \pi_1(\mathbb{C}^*, b)) = \{1\},$$

per un certo (o equivalentemente per ogni) punto $b \in U$.