Nome candidato:

APPELLO B DEL CORSO DI ANALISI COMPLESSA
22 LUGLIO 2022

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (6 punti)
Trovare tutte le funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ la cui parte immaginaria è $v(x, y) = 2xy + x$.
[Suggerimento: usare le equazioni di Cauchy-Riemann]

ESERCIZIO 2 (6 punti)
Determinare il tipo di singolarità isolata in 0 e la sua parte principale delle seguenti funzioni:
(A) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$.
(B) $g(z) = \frac{\cos(1/z)}{1/z}$.
(C) $h(z) = \frac{1}{e^z - 1}$.

ESERCIZIO 3 (6 punti)
Mostrare che ciascuna delle seguenti serie definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$, e determinare i suoi poli con i rispettivi ordini e residui:
(A) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^2 + n^2}$.
(B) $\frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}\right] + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}\right]$

ESERCIZIO 4 (6 punti)
Si calcoli l'integrale
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos\theta} d\theta.$$
[Suggerimento: si trasformi l'integrale in un integrale di una funzione olomorfa lungo la circonferenza unitaria.]

ESERCIZIO 5 (9 punti)
Sia U un aperto connesso e semplicemente connesso di $\mathbb{C}$ e sia f una funzione olomorfa su U mai nulla. Sia $z_0 \in U$ e scegliamo $w_0 \in \mathbb{C}$ tale che $e^{w_0} = f(z_0)$. Si consideri la funzione
$$L_f : U \mapsto \mathbb{C}$$
$$z \mapsto w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw$$
dove l'integrale è fatto lungo un cammino da z_0 a z. Dimostrare che:
(A) L_f è una funzione ben definita ed olomorfa, che soddisfa $L_f'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ per ogni $z \in U$.
(B) $e^{L_f(z)} = f(z)$ per ogni $z \in U$.
(C) Se $L : U \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa tale che $e^{L(z)} = f(z)$ per ogni $z \in U$, allora $L(z) = 2\pi i k + L_f(z)$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$.