ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DI CAUCHY-RIEMANN

ESERCIZIO 1

Sia Ω un intorno di $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ e sia

$$\begin{aligned} f &: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y). \end{aligned}$$

una funzione C^1 in (x_0, y_0) con differenziale $df_{(x_0,y_0)} : \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

Dimostrare che f è olomorfa in z_0 se e solo se $df_{(x_0,y_0)}$ è un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare.

[Suggerimento: $df_{(x_0,y_0)}$ è $\mathbb{C}$-lineare se e solo se commuta con l'automorfismo $J \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ dato dalla moltiplicazione per i.]

ESERCIZIO 2

Sia Ω un intorno di $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ e sia

$$\begin{aligned} f &: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y). \end{aligned}$$

una funzione olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0$. Dimostrare che

$$\det J_f(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2,$$

dove $J_f(x_0, y_0)$ è la matrice Jacobiana di f in (x_0, y_0).

ESERCIZIO 3

Sia Ω un intorno di $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ e sia

$$\begin{aligned} f &: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y). \end{aligned}$$

una funzione C^1 in (x_0, y_0). Si definiscano:

$$\begin{cases} f_z := \dfrac{f_x - if_y}{2}, \\ f_{\overline{z}} := \dfrac{f_x + if_y}{2}. \end{cases}$$

Mostrare che f è olomorfa in z_0 se e solo se $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$ in Ω e in tal caso $f'(z_0) = f_z(z_0)$.

ESERCIZIO 4

Si consideri la funzione

$$\begin{aligned} P &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \\ z &\mapsto P(z) = \sum_{j=0}^{n} p_j(z)\overline{z}^j \end{aligned}$$

dove ciascun $p_j(z)$ è un polinomio. Dimostrare che P è olomorfa su $\mathbb{C}$ se e solo se $p_j \equiv 0$ per ogni $j \geq 1$.

[Suggerimento: usare l'esercizio precedente.]

ESERCIZIO 5

Sia Ω un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione C^1 in $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$. Si definiscano due funzioni $U(r, \theta)$ e $V(r, \theta)$ in opportuni intorni di (r_0, θ_0) come:

$$f(r(\cos\theta + i\sin\theta)) = U(r, \theta) + iV(r, \theta).$$

Mostrare che f è olomorfa in z_0 se e solo se

$$\begin{cases} r_0 U_r(r_0, \theta_0) = V_\theta(r_0, \theta_0), \\ r_0 V_r(r_0, \theta_0) = -U_\theta(r_0, \theta_0). \end{cases}$$

ESERCIZIO 6

Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$z = x + iy \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} \text{ se } z \neq 0, \\ 0 \text{ se } z = 0. \end{cases}$$

Determinare i punti in cui:

(A) f è C^1 (cioè derivabile con derivata continua);
(B) f è derivabile e soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann.
(C) f è olomorfa.

Dire se ci sono dei punti in cui (A) e (B) non sono soddisfatte allo stesso tempo.

ESERCIZIO 7

Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$z = x + iy \mapsto \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} \text{ se } z \neq 0, \\ 0 \text{ se } z = 0. \end{cases}$$

Determinare i punti in cui:

(A) f è C^1 (cioè derivabile con derivata continua);
(B) f è derivabile e soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann.
(C) f è olomorfa.

Dire se ci sono dei punti in cui (A) e (B) non sono soddisfatte allo stesso tempo.