ESERCIZI SULLE SERIE FORMALI E CONVERGENTI

ESERCIZIO 1
Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie:

(A) $\sum_n n^n T^n$.
(B) $\sum_n \frac{T^n}{n^n}$.
(C) $\sum_n a^n T^n$ con $a > 0$.
(D) $\sum_n (\log n)^d n^e T^n$ con $d, e \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.
(E) $\sum_n \frac{n!}{n^n} a^n T^n$ con $a > 0$.
[Suggerimento: usare la formula di Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$]
(F) $\sum_n \frac{(n!)^d}{(dn)!} T^n$ con $d \in \mathbb{N}_{>0}$.
[Suggerimento: usare la formula di Stirling per $n!$]

ESERCIZIO 2
Sia $f(T) \in \mathbb{C}\{T\}$ tale che $\mathrm{ord}(f) = 1$. Dimostrare che l'inversa per composizione $f^{-1}(T)$ è una serie convergente.

ESERCIZIO 3 [Principio d'identità delle serie convergenti]
Sia $f(T), g(T) \in \mathbb{C}\{T\}$. Supponiamo che 0 è un punto di accumulazione per gli zeri della funzione analitica $f(z) - g(z)$ in un intorno dello 0. Allora $f(T) \equiv g(T)$.

ESERCIZIO 4 [Funzioni trigonometriche complesse]
Si considerino le serie

$$\begin{cases} \sin T := \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} T^{2n+1}, \\ \cos T := \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} T^{2n}. \end{cases}$$

Dimostrare che

(A) $R(\sin T) = R(\cos T) = +\infty$.
(B) $\sin T = \frac{e^{iT} - e^{-iT}}{2i}$ e $\cos T = \frac{e^{iT} + e^{-iT}}{2}$.
(C) $(\sin T)^2 + (\cos T)^2 = 1$.
(D) $D(\sin T) = \cos T$ e $D(\cos T) = -\sin T$.
(E) Valgono le formule

$$\begin{cases} \sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2), \\ \cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2), \end{cases}$$

per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
(F)

$$\begin{cases} \sin z = 0 \text{ se e solo se } z \in \pi \cdot \mathbb{Z}, \\ \cos z = 0 \text{ se e solo se } z \in \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5 [Funzioni iperboliche complesse]

Si considerino le serie

$$\begin{cases} \sinh T := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} T^{2n+1}, \\ \cosh T := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} T^{2n}. \end{cases}$$

Dimostrare che

(A) $R(\sinh T) = R(\cosh T) = +\infty$.

(B) $\sinh T = \frac{e^T - e^{-T}}{2}$ e $\cosh T = \frac{e^T + e^{-T}}{2}$.

(C) $-(\sinh T)^2 + (\cosh T)^2 = 1$.

(D) $D(\sinh T) = \cosh T$ e $D(\cosh T) = -\sinh T$.

(E) Valgono le formule

$$\begin{cases} \sinh(iT) = i\sin(T), \\ \cosh(iT) = \cosh(T). \end{cases}$$

(F) Valgono le formule

$$\begin{cases} \sinh(z_1 + z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\sinh(z_2), \\ \cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \sinh(z_1)\sinh(z_2), \end{cases}$$

per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(G)

$$\begin{cases} \sinh z = 0 \text{ se e solo se } z \in i\pi \cdot \mathbb{Z}, \\ \cosh z = 0 \text{ se e solo se } z \in i\frac{\pi}{2} + i\pi \cdot \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6 [Serie binomiale]

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, si consideri la serie

$$(1+T)^\alpha := \sum_n \binom{\alpha}{n} T^n,$$

dove

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Dimostrare che

(A) Il raggio di convergenza di $(1+T)^\alpha$ e'

$$R((1+T)^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \notin \mathbb{N}, \\ +\infty & \text{se } \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

[Suggerimento: usare il criterio del rapporto.]

(B) $(1+T)^\alpha \cdot (1+T)^\beta = (1+T)^{\alpha+\beta}$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(C) Se $\alpha = 1/m$ con $m \in \mathbb{N}_{>0}$ allora $[(1+T)^{1/m}]^m = 1 + T$.

[Suggerimento: per la parte (B), si può usare che $[(1+x)^{1/m}]^m = 1 + x$ per ogni $-1 < x < 1$ e il principio d'identità delle serie convergenti.]

ESERCIZIO 7 [Serie Logaritmo]

Si consideri la serie

$$\log(1+T) := \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} T^n.$$

Dimostrare che:

(A) Il raggio di convergenza di $\log(1+T)$ e' uguale a 1.
(B) L'inversa per composizione di $\log(1+T)$ è uguale a $e^T - 1$.
(C) $\log(1+T)$ è l'unica serie $f(T) \in \mathbb{C}[[T]]$ tale che $D(f) = \frac{1}{1+T}$ e $f(0) = 0$.
(D) $\log(1+T)^\alpha = \alpha \log(1+T)$ e $(1+T)^\alpha = e^{\alpha \log(1+T)}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.
(E) $\log((1+h_1)(1+h_2)) = \log(1+h_1) + \log(1+h_2)$ per ogni $h_1, h_2 \in \mathbb{C}[[T]]$ tale che $h_1(0) = h_2(0) = 0$.

ESERCIZIO 8 [Funzione Logaritmo]

Per ogni $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si scelga $w_0 \in \mathbb{C}$ tale che $e^{w_0} = z_0$ e si definisca la funzione olomorfa

$$\log : D_{|z_0|}(z_0) \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$z \mapsto \log\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right) + w_0$$

Mostrare che
(A) $e^{\log(z)} = z$ per ogni $z \in D_{|z_0|}(z_0)$.
(B) $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$ per ogni $z, w \in D_{|z_0|}(z_0)$ tale che $zw \in D_{|z_0|}(z_0)$.
(C) $(\log z)' = \frac{1}{z}$ per ogni $z \in D_{|z_0|}(z_0)$.

ESERCIZIO 9 [Equazioni alle differenze di ordine 2]

Siano $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$ tale che

$$T^2 - u_1 T - u_2 = (T - \alpha)(T - \beta) \quad \text{per } \alpha \neq \beta.$$

Siano $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ e si definiscano per induzione i numeri a_n (con $n \geq 2$) tramite

$$a_n = u_1 a_{n-1} + u_2 a_{n-2}.$$

(A) Dimostrare che esistono unici $A, B \in \mathbb{C}$ tale che

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n \quad \text{per ogni } n \geq 0.$$

[Suggerimento: determinare A e B usando i casi $n = 0$ e $n = 1$, e poi procedere per induzione su n.]

(B) Sia $F(T) := \sum_n a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$. Dimostrare che

$$F(T) = \frac{A}{1 - \alpha T} + \frac{B}{1 - \beta T}.$$

(C) Mostrare che il raggio di convergenza di $F(T)$ è

$$R(F) := \frac{1}{\max\{|\alpha|, |\beta|\}}.$$

ESERCIZIO 10

Una serie di potenze $f(T) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge *normalmente* in un insieme $S \subset \mathbb{C}$ se esiste una successione $\{M_n\}_{n \geq 0}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che
(i) $|a_n z^n| \leq M_n$ per ogni $z \in S$;
(ii) la serie numerica $\sum_n M_n$ converge.

Dimostrare che se $f(T) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalmente in S allora $f(T)$ converge assolutamente uniformemente in S.

[Suggerimento: usare il criterio di Cauchy per la convergenza assoluta uniforme].

ESERCIZIO 11 [Criterio della radice]

Sia $\{v_n\}$ una successione in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Dimostrare che:
(A) Se $\limsup \sqrt[n]{v_n} < 1$ allora $\sum_n v_n < +\infty$.

(B) Se $\limsup \sqrt[n]{v_n} > 1$ allora $\sum_n v_n = +\infty$.

ESERCIZIO 12 [Criterio del rapporto]
Sia $\{v_n\}$ una successione in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Dimostrare che:

(A) Se $\limsup \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ allora $\sum_n v_n < +\infty$.
(B) Se $\liminf \frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ allora $\sum_n v_n = +\infty$.

ESERCIZIO 13 [Inefficienza dei test del rapporto e della radice nei casi limite]
Si consideri la successione $\{v_n := n^{-s}\}$ per $s > 0$. Mostrare che

(A) $\limsup \sqrt[n]{n^{-s}} = \lim \frac{(n+1)^{-s}}{n^{-s}} = 1$.
(B) $\sum_n n^{-s} < +\infty$ se e solo se $s > 1$.

ESERCIZIO 14 [Caratterizzazioni alternative del Raggio di Convergenza]
Dimostrare che il raggio di convergenza $R(f)$ di una serie di potenze $f(T) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ è uguale a

$$R(f) = \sup\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ : \sum_n |a_n| r^n < +\infty\} = \sup\{\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ : \{|a_n|\rho^n\}_n \text{ is bounded}\}.$$

[Suggerimento: per la prima uguaglianza si usi il test della radice; per la parte non ovvia della seconda disuguaglianza, si usi il confronto con la serie geometrica.]

ESERCIZIO 15 [Esempi di convergenza di serie al bordo del disco di convergenza]

(A) Mostrare che il raggio di convergenza di $\sum_n T^n$ è 1 e la serie diverge in ogni punto di $\partial D_1(0)$.
(B) Mostrare che il raggio di convergenza di $\sum_n \frac{T^n}{n}$ è 1 e la serie diverge per $z = 1$ ma converge in ogni punto di $\partial D_1(0) \setminus \{1\}$.
(C) Mostrare che il raggio di convergenza di $\sum_n \frac{T^n}{n^2}$ è 1 e la serie converge in ogni punto di $\partial D_1(0)$.