# ESERCIZI SUL LOGARITMO COMPLESSO

**ESERCIZIO** [Logaritmo complesso su aperto semplicemente connesso]
Sia $U$ un aperto connesso e semplicemente connesso di $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sia $z_0 \in U$ e scegliamo $w_0 \in \mathbb{C}$ tale che $e^{w_0} = z_0$. Si consideri la funzione

$$\begin{aligned} \log : U &\mapsto \mathbb{C} \\ z &\mapsto w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{1}{w} dw \end{aligned}$$

dove l'integrale è fatto lungo un cammino da $z_0$ a $z$. Dimostrare che:

(A) $\log z$ è ben definita.
(B) $\log z$ è una funzione olomorfa e vale che $(\log z)' = \frac{1}{z}$ per ogni $z \in U$.
(C) Lo sviluppo in serie di potenze di $\log z$ in $z_0$ è uguale a

$$\log z = w_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n} (z - z_0)^n.$$

(D) $e^{\log z} = z$ per ogni $z \in U$.
(E) Se $z = re^{i\theta}$ è la rappresentazione polare di $z \in U$, allora $\log z = \log r + i\theta'$ con $\theta' \equiv \theta \mod 2\pi$.
(F) Se $L : U \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa tale che $L'(z) = \frac{1}{z}$ per ogni $z \in U$, allora $L(z) = c + \log z$ per una costante $c \in \mathbb{C}$.
(G) Se $L : U \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa tale che $e^{L(z)} = z$ per ogni $z \in U$, allora $L(z) = 2\pi i k + \log z$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$.

**ESERCIZIO** [Logaritmo e Primitiva di $1/z$]
Sia $U$ un aperto connesso di $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dimostrare che:

(A) Se $L$ è una funzione olomorfa su $U$ tale che $e^{L(z)} = z$ per ogni $z \in U$, allora $L'(z) = \frac{1}{z}$ per ogni $z \in U$. [Suggerimento: derivare l'identità $e^{L(z)} = z$.]
(B) Se $P$ è una funzione olomorfa e vale che $P'(z) = \frac{1}{z}$ per ogni $z \in U$, allora $e^{P(z)} = Cz$ per una costante $C \in \mathbb{C}^*$ e per ogni $z \in U$.
Dedurre che esiste una costante $D \in \mathbb{C}$ tale che $L(z) := P(z) + D$ soddisfa $e^{L(z)} = z$ per ogni $z \in U$.
[Suggerimento: derivare la funzione $e^{-P(z)}z$.]
(C) Dimostrare che esiste una funzione $P$ come in (B) se e solo se

$$\mathrm{Im}(\pi_1(U, b) \to \pi_1(\mathbb{C}^*, b)) = \{1\},$$

per un certo (o equivalentemente per ogni) punto $b \in U$.

**ESERCIZIO** [Primitive iterate del logaritmo]
Sia $U$ un aperto di $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ su cui esiste una funzione logaritmo log. Per ogni $m \geq 0$, si consideri la funzione olomorfa

$$\begin{aligned} L_{-m} : U &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ z &\mapsto \left[\log z - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right)\right] \frac{z^m}{m!}. \end{aligned}$$

Dimostrare che $L_0 = \log$ e $L'_{-m} = L_{-m+1}$.

**ESERCIZIO** [Logaritmo di una funzione]

Sia $U$ un aperto connesso e semplicemente connesso di $\mathbb{C}$ e sia $f$ una funzione olomorfa su $U$ mai nulla. Sia $z_0 \in U$ e scegliamo $w_0 \in \mathbb{C}$ tale che $e^{w_0} = f(z_0)$. Si consideri la funzione

$$L_f : U \mapsto \mathbb{C}$$
$$z \mapsto w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw$$

dove l'integrale è fatto lungo un cammino da $z_0$ a $z$. Dimostrare che:

(A) $L_f$ è ben definita.

(B) $L_f$ è una funzione olomorfa e vale che $L'_f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ per ogni $z \in U$.

(C) $e^{L_f(z)} = L_f(z)$ per ogni $z \in U$.

(D) Se $L : U \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa tale che $e^{L(z)} = f(z)$ per ogni $z \in U$, allora $L(z) = 2\pi ik + L_f(z)$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$.

**ESERCIZIO** [Potenza complessa]

Sia $U$ un aperto di $\mathbb{C}^*$ su cui esiste una funzione logaritmo log, cioè una funzione olomorfa su $U$ tale che $e^{\log(z)} = z$ per ogni $z \in U$.

Per ogni numero complesso $\alpha$ e per ogni $z \in U$, si definisca

$$z^\alpha := e^{\alpha \log(z)}.$$

Dimostrare che:

(A) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, la funzione $z \mapsto z^\alpha$ è una funzione olomorfa su $U$.

(B) Se $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, allora $z^\alpha$ coincide con la definizione usuale di $z^n$.

(C) $z^{\alpha+\beta} = z^\alpha \cdot z^\beta$ per ogni $z \in U$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(D) Se $\alpha = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, allora $z^{1/n}$ è una radice $n$-esima di $z$.

(E) Sia $R_n$, con $n \in \mathbb{N}$, una funzione olomorfa su $U$ tale che $R_n(z)^n = z$ per ogni $z \in U$. Dimostrare che $R_n(z) = e^{n \log(z)}$ per ogni $z \in U$.