ESERCIZI SU SERIE DI FUNZIONI OLOMORFE, SVILUPPI IN SERIE DI LAURENT, SINGOLARITÀ ISOLATE

ESERCIZIO 1
Sia f una funzione olomorfa in un punto z_0 con $f'(z_0)$. Dimostrare che
$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{\partial D_\epsilon(z_0)} \frac{1}{f(z) - f(z_0)} dz$$
per ogni $0 < \epsilon << 1$.
[Suggerimento: applicare la formula globale di Cauchy alla funzione $F(z) = \frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}$.]

ESERCIZIO 2
Sia $a > 0$. Dimostrare che ciascuna delle seguenti serie di funzioni olomorfe definisce una funzione olomorfa nella regione indicata
(a) $\sum_{n\geq 1} e^{-an^2 z}$ per $\Re(z) > 0$;
(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-anz}}{(a+n)^2}$ per $\Re(z) > 0$;
(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(a+n)^z}$ per $\Re(z) > 1$;

ESERCIZIO 3
(a) Dimostrare che ciascuna delle due serie di funzioni olomorfe converge uniformemente sui compatti di $D_1(0)$
$$\sum_{n\geq 1} \frac{nz^n}{1-z^n} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}.$$
(b) Dimostrare che le due serie precedenti convergono alla stessa funzione olomorfa su $D_1(0)$.
[Suggerimento: sviluppare il denominatore in serie geometrica per ottenere una doppia serie e poi scambiare l'ordine delle serie.]

ESERCIZIO 4 [Serie di Dirichlet]
Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi e si consideri la serie di funzioni (detta serie di Dirichlet associata $\{a_n\}$)
$$\sum_n \frac{a_n}{n^z}$$
Dimostrare che se la serie converge in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, allora la serie converge uniformemente sui compatti della regione $\Re(z) \geq \Re(z_0) + 1$.

ESERCIZIO 5
Si consideri la funzione razionale $f(z) = \frac{1}{z-1}$. Si determini lo sviluppo in serie di Laurent in ciascuna delle seguenti regioni
(a) $A_{\infty/0}(1)$;
(b) $D_1(0)$;
(c) $A_{\infty/1}(0)$.

ESERCIZIO 6
Si consideri la funzione razionale $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$. Si determini lo sviluppo in serie di Laurent in ciascuna delle seguenti regioni

(a) $D_1(0)$;
(b) $A_{2/1}(0)$;
(c) $A_{\infty/2}(0)$;
(d) $A_{1/0}(1)$;
(e) $A_{\infty/1}(1)$;
(f) $A_{\infty/0}(2)$.

[Suggerimento: scrivere la decomposizione della funzione razionale in frazioni semplici]

ESERCIZIO 7

Si consideri la funzione razionale $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$. Si determini lo sviluppo in serie di Laurent in ciascuna delle seguenti regioni

(a) $D_1(0)$;
(b) $A_{\infty/1}(0)$;
(c) $A_{2/0}(i)$;
(d) $A_{\infty/2}(i)$;
(e) $A_{2/0}(-i)$;
(f) $A_{\infty/2}(-i)$.

[Suggerimento: scrivere la decomposizione della funzione razionale in frazioni semplici]

ESERCIZIO 8

Dimostrare che ciascuna delle seguenti serie di funzioni meromorfe su $\mathbb{C}$ definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$

(a) $\frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{z}{z^2-n^2}$;
(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$;
(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{z^2+n^2}$;
(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(z+n)^2}$;
(e) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nz)}{n!(z^2+n^2)}$;
(f) $\sum_{n\geq 1} \left[\frac{1}{(z-a_n)^2} - \frac{1}{a_n^2}\right]$ per ogni successione $\{a_n\}$ di numeri complessi tale che $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|a_n|^3}$ converge.

Per ciascuna delle funzioni precedenti, determinare i poli, il loro ordine e i loro residui.

[Suggerimento: Per ciascuna delle serie precedenti si dimostri che la serie degli N-resti $\sum_{n\geq N}$ converge assolutamente uniformimente su una disco $D_R(0)$ con R piccolo rispetto a N.]

ESERCIZIO 9 [Caratterizzazione delle funzioni polinomiali e razionali]

(a) Dimostrare che una funzione $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ è polinomiale se e solo $f(1/z)$ è olomorfa o ha un polo in 0, e in tal caso $\deg f = -\operatorname{ord}_0 f(1/z)$.

In particolare, una funzione $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ è costante se e solo $f(1/z)$ è olomorfa in 0.

[Suggerimento: l'implicazioni $\Rightarrow$ sono facili. Per dimostrare l'implicazioni $\Leftarrow$, si sviluppi f in serie in 0 (con che raggio di convergenza?) e si guardi allo sviluppo in serie di Laurent di $f(1/z)$ in 0.]

(b) Dimostrare che una funzione $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ha un numero finito di poli se e solo se $f(1/z)$ ha una singolarità isolata in 0.

(c) Dimostrare che una funzione $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ è razionale se e solo $f(1/z)$ è olomorfa o ha un polo in 0.

[Suggerimento: l' implicazione $\Rightarrow$ è facile. Per dimostrare l' implicazione $\Leftarrow$, si dimostri (usando il punto (b)) che esiste un polinomio $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ tale che $P(z)f(z)$ è olomorfa e poi si concluda usando il punto (c).]

ESERCIZIO 10 [Zeri e Poli di funzioni razionali]

(a) Dimostrare che se $f(z)$ è una funzione razionale allora
$$\mathrm{ord}_{P\in\mathbb{C}}\, \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_0\, f(1/z) = 0.$$

(b) Sia $m : \mathbb{C} \to \mathbb{Z}_{\neq 0}$ a supporto finito, cioè tale che il sottoinsieme $\mathrm{Supp}(m) := \{P \in \mathbb{C} : m(P) \neq 0\}$ è finito. Dimostrare che esiste una funzione razionale f, unica a meno di moltiplicazione per una costante non nulla, tale che
$$\mathrm{ord}_P(f) = m(P) \text{per ogni } P \in \mathbb{C}.$$
Inoltre, mostrare che una tale funzione soddisfa
$$\mathrm{ord}_0\, f(1/z) := -\sum_{P\in S} m(P).$$