ESERCIZI SU CALCOLO DEI RESIDUI E FUNZIONI SUL DISCO

ESERCIZIO 1 [Residui di poli semplici]

(a) Supponiamo che f ha un polo semplice in z_0 e g è olomorfa in z_0. Dimostrare che fg ha un polo semplice in z_0 e che

$$\operatorname{res}_{z_0}(fg) = \operatorname{res}_{z_0}(f) \cdot g(z_0).$$

(b) Supponiamo che f è olomorfa in z_0 con $f(z_0) = 0$ e $f'(z_0) \neq 0$. Dimostrare che $1/f$ ha un polo semplice in z_0 e che

$$\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

ESERCIZIO 2

Calcolare i seguenti integrali:

(a)

$$\int_{\partial D_{1/2}(i)} \frac{1}{z^4 - 1} dz$$

(b)

$$\int_R \frac{1}{z^2 + z + 1} dz$$

dove R è il rettangolo di vertici 0, 10, $4i$, $10 + 4i$.

(c)

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{\cos e^{-z}}{z^2} dz$$

(d)

$$\int_{\partial D_8(0)} \frac{1}{\sin z} dz$$

(e)

$$\int_{\partial D_8(0)} \frac{1+z}{1-e^z} dz$$

(f)

$$\int_{\partial D_8(0)} \frac{1+z}{1-\sin z} dz$$

(g)

$$\int_{\partial D_8(0)} \frac{1}{1-\cos z} dz$$

(h)

$$\int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz$$

con γ curva chiusa di $\mathbb{C}^*$.

ESERCIZIO 3 [Integrali definiti di funzioni razionali]

Calcolare i seguenti integrali:

(a)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$$
(b)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$$
(c)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} dx$$
(d)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^n+1} dx$$
con $n \geq 2$.
(e)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$$
(f)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx$$
(g)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^5+1} dx$$
[Suggerimento: integrare la funzione integranda (come funzione complessa) lungo la curva chiusa formata dal segmento $[-R, R]$ e dalla semicirconferenza centrata in 0 e di raggio R, con $R \to +\infty$.]

ESERCIZIO 4 [Integrali definiti "Trasformata di Fourier"]
Calcolare i seguenti integrali:
(a)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx$$
con $a > 0$.
(b)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$$
con $a > 0$.
(c)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2} dx$$
con $a > 0$.
(d)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$$
con $a > b > 0$.

(e)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx$$

con $a > 0$.

(f)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx$$

con $a > 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx$$

[Suggerimento: integrare la funzione integranda (come funzione complessa) lungo il bordo di un rettangolo di vertici $-R$, R, $R+iT$, $-R+iT$ con T opportuno e $R \to +\infty$.]

ESERCIZIO 5

Calcolare i seguenti integrali:

(a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2} dx$$

[Suggerimento: integrare la funzione integranda (come funzione complessa) lungo la curva formata dal segmento $[\epsilon, R]$, dalla semicirconferenza centrata in 0 di raggio R, il segmento $[-R, -\epsilon]$ e la semicirconferenza centrata in 0 di raggio ϵ, con $R \to +\infty$ e $\epsilon \to 0^+$.]

(c)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos x)^2}{a^2 - x^2} dx$$

con $a > 0$. [Suggerimento: integrare la funzione integranda (come funzione complessa) lungo la curva formata dal segmento $[\epsilon, R]$, dalla semicirconferenza centrata in 0 di raggio R, il segmento $[-R, -\epsilon]$ e la semicirconferenza centrata in 0 di raggio ϵ, con $R \to +\infty$ e $\epsilon \to 0^+$.]

[Suggerimento: integrare la funzione integranda (come funzione complessa) lungo la curva formata dal segmento $[-a+\epsilon, a-\epsilon]$, la semicirconferenza di centro a e raggio ϵ, il segmento $[a+\epsilon, R]$, la semicirconferenza centrata in 0 di raggio R, il segmento $[-R, -a-\epsilon]$ e la la semicirconferenza di centro $-a$ e raggio ϵ, con $R \to +\infty$ e $\epsilon \to 0^+$.]

ESERCIZIO 6 [Integrali definiti trigonometrici]

Calcolare i seguenti integrali:

(a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin\theta} d\theta$$

con $a > 0$.

(b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos\theta} d\theta$$

con $a > 0$.

(c)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a^2-2a\cos\theta} d\theta$$

(d)
(e)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos\theta} d\theta$$

(f)

$$\int_0^{2\pi} \frac{a}{1+2a^2-\cos\theta} d\theta$$

(g)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\sin\theta} d\theta$$

(h)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos\theta)^2} d\theta$$

(i)

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^n d\theta$$

[Suggerimento: usare la sostituzione $z = e^{i\theta}$ e realizzare l'integrale come un integrale di una funzione complessa lungo la circonferenza unitaria.]

ESERCIZIO 7

Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Dimostrare $f(\mathbb{C})$ è denso.
[Suggerimento: si consideri $f(1/z)$ e si analizzi la sua singolarità isolata in 0.]

ESERCIZIO 8

Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ olomorfa tale che $f(0) = 0$. Dimostrare che:

(a) $|f'(0)| \leq 1$;
(b) se $|f'(0)| = 1$ allora $f(z) = e^{i\phi}z$ con $\phi \in \mathbb{R}$.

[Suggerimento: per (a) si usi il Lemma di Schwarz. Per (b): se la conclusione non vale si scriva

$$\frac{f(z)}{z} = f'(0) + h(z),$$

con $h(z)$ olomorfa non constante tale che $h(0)$. Si applichi il teorema della mappa aperta a h in 0 per contraddire il Lemma di Schwartz.]

ESERCIZIO 9

Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ olomorfa. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{D}$ si ha che

$$|f'(a)| \leq \frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}.$$

[Suggerimento: Si consider la mappa $F := g_{f(a)} \circ f \circ g_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Si mostri che $F(0) = 0$ e si applichi il punto (a) delll'esercizio precedente a F.]

ESERCIZIO 10 [Automorfismi di $\mathbb{H}$]

(a) Dimostrare che, data una matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, la mappa

$$\begin{aligned} f_M : \mathbb{H} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

è olomorfa e la sua immagine è contenuta in $\mathbb{H}$.

(b) Dimostrare che

$$\begin{cases} f_{I_2} = \mathrm{id}, \\ f_{M_1} \circ f_{M_2} = f_{M_1 \cdot M_2} \quad \text{per ogni } M_1, M_2 \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}). \end{cases}$$

(c) Usare (a) e (b) per dedurre che la mappa

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Aut}(\mathbb{H}), \\ M &\mapsto f_M \end{aligned}$$

è den definita ed è un omomorfismo di gruppi.

(d) Dimostrare che

$$\ker(\Phi) = \{\lambda \cdot I_2 \ : \ \lambda \in \mathbb{R}^*\}.$$

Dedurre che Φ induce un omomorfismo iniettivo

$$\begin{aligned} \overline{\Phi} : \mathrm{PGL}_2^+(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Aut}(\mathbb{H}), \\ [M] &\mapsto f_{[M]} \end{aligned}$$

(e) Dimostrare che $\overline{\Phi}(\mathrm{PGL}_2^+(\mathbb{R}))$ agisce in maniera transitiva su $\mathbb{H}$.

[Suggerimento: si considerino gli automorfismi indotti dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}.]$$

(f) Dimostrare che

$$\overline{\Phi}^{-1}(\mathrm{Stab}(i)) = \left\{ \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right] \ : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}.$$

(g) Dimostrare che

$$\mathrm{Stab}(i) = \overline{\Phi} \left\{ \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right] \ : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}.$$

[Suggerimento: Si osservi che la trasformata di Cayley

$$\begin{aligned} C : \mathbb{H} &\xrightarrow{\cong} \mathbb{D} \\ z &\mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

induce un uguaglianza

$$\mathrm{Stab}(i) = C^{-1} \circ \mathrm{Stab}(0) \circ C,$$

e si usi la descrizione nota di $\mathrm{Stab}(o) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.]

(h) Si dimostri che $\overline{\Phi}$ è suriettiva.

[Suggerimento: usare (e) e (g).]