Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO A DEL CORSO AL210 – ALGEBRA 2
1 FEBBRAIO 2019

(1) Si consideri il gruppo
$$G = \langle a, x | a^8 = 1, x^2 = 1, xa = a^3 x \rangle.$$

(A) (3 punti) Dimostrare che ogni elemento di G si scrive in maniera unica nella forma (chiamata in seguito forma canonica)
$$a^k \text{ oppure } a^k x \text{ con } k \in \mathbb{Z}_8,$$
con la solita convenzione che $a^0 = 1$ è l'identità di G.

(B) (3 punti) Determinare la tabella di moltiplicazione del gruppo G, cioè scrivere $(a^k x^i) \cdot (a^l x^j)$ (per $k, l \in \mathbb{Z}_8$ e $i, j = 0, 1$) in forma canonica.

(C) (3 punti) Calcolare l'ordine di ciascun elemento di G e scrivere il suo inverso in forma canonica.

(D) (3 punti) Dimostrare che le classi di coniugio di G sono
$$\{1\}, \{a, a^3\}, \{a^2, a^6\}, \{a^5, a^7\}, \{a^4\}, \{a^k x : k \text{ è pari}\}, \{a^k x : k \text{ è dispari}\}.$$

(E) (4 punti) Dimostrare che il centro di G è uguale a
$$Z(G) = \langle a^4 \rangle,$$
e che il quoziente $G/Z(G)$ è isomorfo a D_4.

(F) (4 punti) Dimostrare che il sottogruppo commutatore di G è uguale a
$$[G, G] = \langle a^2 \rangle,$$
e che il quoziente $G/[G, G]$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(G) (4 punti) Dimostrare che $[G, G]$ è l'unico sottogruppo normale di G di ordine 4.

(H) (4 punti) Dimostrare che gli unici sottogruppi di G di ordine 8 sono
$$\begin{cases} H_1 = \langle a \rangle, \\ H_2 = \langle a^2, x \rangle, \\ H_3 = \langle a^2, ax \rangle. \end{cases}$$
[Suggerimento: Mostrare che ogni tale sottogruppo contiene $[G, G]$.]

(I) (5 punti) Per ciascuno dei sottogruppi H_i del punto precedente, si trovino tutti i sottogruppi (qualora esistano) S di G tali che G è isomorfo al prodotto semidiretto interno $H_i \rtimes S$.
[Suggerimento: che cardinalità avrà un tale sottogruppo S?]

(J) (5 punti) Dimostrare che gli automorfismi di G sono della forma
$$\phi_{s,t}(a) = a^s \text{ e } \phi_{s,t}(x) = a^{2t} x$$
con $s \in (\mathbb{Z}_8)^*$ e $t \in \mathbb{Z}_4$. Dedurre che $|\operatorname{Aut}(G)| = 16$.

(K) (5 punti) Dimostrare che $\operatorname{Aut}(G) \cong \mathbb{Z}_4 \rtimes_\theta (\mathbb{Z}_8)^*$, con $\theta : \mathbb{Z}_8^* \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}_4)^* \cong \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_4)$ dove il primo omomorfismo è indotto dalla riduzione modulo 4 e il secondo isomorfismo è indotto dalla moltiplicazione degli elementi in $\mathbb{Z}_4$.
[Suggerimento: si calcoli la composizione degli automorfismi $\phi_{s,t}$ nel punto (J).]

(L) (5 punti) Dimostrare che tutti i sottogruppi normali di G sono anche caratteristici.
[Suggerimento: Si consideri l'azione degli automorfismi di G sulle classi di coniugio.]

(2) Siano H un gruppo abeliano finito e sia $F = (F, +, \cdot, 0, 1)$ un campo.

(A) (4 punti) Dimostrare che H non è ciclico se e solo se H contiene un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ per qualche primo p.

(B) (4 punti) Dimostrare che H è ciclico se e solo se, per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$, H contiene al più n elementi di ordine che divide n.

(C) (4 punti) Dimostrare che ogni sottogruppo finito di $(F^*, \cdot, 1)$ è ciclico.

(3) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} \mathbb{Q}(\sqrt{-5}) := \{a + b\sqrt{-5}\ : a, b \in \mathbb{Q}\}, \\ \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5}\ : a, b \in \mathbb{Z}\}, \end{cases}$$

(A) (4 punti) Dimostrare che, rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$ indotte da $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ è un dominio integrale con campo dei quozienti $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

(B) (4 punti) Mostrare che le unità di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sono date da

$$U(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]) = \{\pm 1\}.$$

(C) (4 punti) Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ non è un dominio a fattorizzazione unica.