Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO B DEL CORSO AL210 – ALGEBRA 2
18 FEBBRAIO 2019

(1) Si consideri il gruppo
$$G = \langle a, x | a^8 = 1, x^2 = 1, xax = a^5 \rangle.$$

(A) (3 punti) Dimostrare che ogni elemento di G si scrive in maniera unica nella forma (chiamata in seguito forma canonica)
$$a^k \text{ oppure } a^k x \text{ con } k \in \mathbb{Z}_8,$$
con la solita convenzione che $a^0 = 1$ è l'identità di G.

(B) (3 punti) Determinare le formule di moltiplicazione del gruppo G, cioè scrivere $(a^k x^i) \cdot (a^l x^j)$ (per $k, l \in \mathbb{Z}_8$ e $i, j = 0, 1$) in forma canonica.

(C) (3 punti) Calcolare l'ordine di ciascun elemento di G e scrivere il suo inverso in forma canonica.

(D) (4 punti) Determinare le classi di coniugio di G.

(E) (4 punti) Determinare il sottogruppo commutatore $[G, G]$ di G e mostrare che il quoziente $G/[G, G]$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

(F) (5 punti) Dimostrare che gli unici sottogruppi non normali di G sono $U_1 := \langle x \rangle$ e $U_2 := \langle a^4 x \rangle$.
[Suggerimento: si usi che un sottogruppo non normale non può contenere $[G, G]$ (perché?).]

(G) (5 punti) Dimostrare che gli unici sottogruppi di G di ordine 4 sono
$$\begin{cases} H_1 = \langle a^2 \rangle, \\ H_2 = \langle a^2 x \rangle, \\ H_3 = \langle a^4, x \rangle. \end{cases}$$
[Suggerimento: si usi che ogni sottogruppo di ordine 4 è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ oppure $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.]

(H) (5 punti) Per ciascuno dei sottogruppi H_i del punto precedente, si dica se G/H_i è isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ oppure $\mathbb{Z}_4$ e si determini se l'estensione
$$0 \to H_i \to G \to G/H_i \to 0$$
spezza.

(I) (5 punti) Dimostrare che gli unici sottogruppi di ordine 8 di G sono
$$\begin{cases} L_1 = \langle a \rangle, \\ L_2 = \langle ax \rangle, \\ L_3 = \langle a^2, x \rangle. \end{cases}$$
[Suggerimento: si usi che ogni sottogruppo di G di ordine 8 deve essere abeliano per il punto (F) e poi si usi la struttura dei gruppi abeliani di ordine 8.]

(J) (5 punti) Per ciascuno dei sottogruppi L_i del punto precedente, si dica se G è isomorfo al prodotto semidiretto interno $G = L_i \rtimes S_i$ per un qualche sottogruppo S_i.
[Suggerimento: che cardinalità ha S_i?]

(2) Sia R un dominio a ideali principali.

(A) (4 punti) Sia M un ideale di R. Dimostrare che le seguenti condizioni su M sono equivalenti:

(i) M è massimale,

(ii) M è primo e diverso da (0),

(iii) $M = (p)$ con p elemento irriducibile.

(B) (4 punti) Dimostrare che ogni ideale proprio di R si scrive come prodotto $M_1 \cdots M_n$ di ideali massimali, che sono univocamente determinati a meno dell'ordine.

(C) (4 punti) Sia $a \in R$. Dimostrare che:

- $R/(a)$ è un campo se a è un elemento primo.
- $R/(a)$ non è un dominio se a non è un elemento primo.

(3) Si consideri il seguente sottoanello unitario di $\mathbb{C}$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \ : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C},$$

e il suo campo dei quozienti

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \ : a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

(A) (3 punti) Dimostrare che la funzione

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] &\longrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \\ a + b\sqrt{2} &\mapsto a - b\sqrt{2} \end{aligned}$$

è un isomorfismo unitario di anelli. Dedurre che la funzione

$$\begin{aligned} N : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto x \cdot \sigma(x) \end{aligned}$$

è moltiplicativa, cioè soddisfa $N(xy) = N(x)N(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(B) (5 punti) Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ è un dominio Euclideo rispetto alla funzione

$$\begin{aligned} |N| : \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^* &\longrightarrow \mathbb{N}_{>0}, \\ a + b\sqrt{2} &\mapsto |N(a + b\sqrt{2})| = |a^2 - 2b^2|. \end{aligned}$$

(C) (5 punti) Mostrare che 2 è il prodotto di due irriducibili associati di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(D) (5 punti) Mostrare che 7 è il prodotto di due irriducibili non associati di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(E) (5 punti) Dimostrare che 3 è irriducibile in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.