Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO C DEL CORSO AL210 – ALGEBRA 2
11 GIUGNO 2019

(1) Si consideri il gruppo
$$G = \langle x, y | x^4 = 1, y^4 = 1, yxy^{-1} = x^3 \rangle.$$

(A) (3 punti) Dimostrare che ogni elemento di G si scrive in maniera unica nella forma (chiamata in seguito forma canonica)
$$x^h y^i \text{ con } h, i \in \mathbb{Z}_4,$$
con la solita convenzione che $a^0 x^0 = 1$ è l'identità di G.

(B) (3 punti) Determinare la formula di moltiplicazione del gruppo G, cioè scrivere $(x^h y^i) \cdot (x^k y^j)$ (per $h, k, i, j \in \mathbb{Z}_4$) in forma canonica.

(C) (4 punti) Calcolare l'ordine degli elementi di G e scrivere l'inverso di ogni elemento in forma canonica.

(D) (4 punti) Dimostrare che il centro di G è dato da $Z(G) = \{1, x^2, y^2, x^2y^2\}$.

(E) (4 punti) Dimostrare che $Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e che $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(F) (4 punti) Dimostrare che gli unici sottogruppi di ordine 2 di G sono $\langle x^2 \rangle$, $\langle y^2 \rangle$ e $\langle x^2y^2 \rangle$ e che essi sono tutti normali.

(G) (4 punti) Per ciascuno dei sottogruppi del punto precedente, si calcoli una presentazione del quoziente e si identifichi il quoziente con dei gruppi noti (cioè già visti a lezione).

(H) (4 punti) Dimostrare che il sottogruppo derivato $[G, G]$ di G è uguale a $\langle x^2 \rangle$. [Suggerimento: si usi la struttura di $G/\langle x^2 \rangle$ determinata in (G).]

(I) (4 punti) Dimostrare che $\langle x \rangle$ è un sottogruppo normale di G tale che $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ e $G/\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_4$.

(J) (4 punti) Dire se esiste un sottogruppo S di G tale che $G \cong \langle x \rangle \rtimes S$.

(K) (5 punti) Dimostrare che le classi di coniugio di G sono
$$\{1\}, \{x^2\}, \{y^2\}, \{x^2y^2\}, \{x, x^3\}, \{y, x^2y\}, \{xy, x^3y\}, \{xy^2, x^3y^2\}, \{y^3, x^2y^3\}, \{xy^3, x^3y^3\}.$$
[Suggerimento: in alternativa ai conti, si possono usare le informazioni su $Z(G)$ (vedere punto (D)) e su alcuni quozienti abeliani di G (vedere i punti (G) e (I)).]

(L) (4 punti) Dimostrare che gli unici sottogruppi di indice 2 sono $U_1 := \langle x, y^2 \rangle$, $U_2 := \langle x^2, y \rangle$ e $U_3 := \langle x^2, xy \rangle$.
[Suggerimento: ci si può ridurre (perché?) a classificare tutti gli omomorfismi suriettivi $G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$.]

(M) (4 punti) Per ciascuno dei sottogruppi U_i del punto precedente, si dica se esiste un sottogruppo L_i di G tale che $G \cong U_i \rtimes L_i$.

(N) (3 punti) Dimostrare che gli unici sottogruppi ciclici di ordine 4 sono
$$C_1 := \langle x \rangle, C_2 := \langle xy^2 \rangle, C_3 := \langle y \rangle, C_4 := \langle xy \rangle, C_5 := \langle x^2y \rangle, C_6 := \langle x^3y \rangle.$$

(O) (5 punti) Si dica quali dei sottogruppi C_i del punto precedente sono normali, e per ciascuno di essi si calcoli il quoziente G/C_i e si dica se l'estensione
$$0 \to C_i \to G \to G/C_i \to 0$$
spezza.

[Suggerimento: usare i punti (K) e (C).]

(2) Sia p un primo e sia F un campo finito di caratteristica p.
   (A) (4 punti) Dimostrare che se $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ è irriducibile di grado $n \geq 1$ allora $\mathbb{Z}_p[x]/(f(x))$ è un campo finito di cardinalità p^n.
   (B) (4 punti) Dimostrare che F contiene $\mathbb{Z}_p$ e la sua cardinalità è uguale a p^n per qualche $n \geq 1$.
   (C) (4 punti) Dimostrare che F^* è un gruppo ciclico.
   [Suggerimento: si può usare il seguente criterio di ciclicità: un gruppo abeliano finito G è ciclico se e solo se, per ogni $m \geq 1$, il gruppo G contiene al più m elementi di ordine che divide m].
   (D) (4 punti) Fissato un generatore g di F^*, si mostri che la mappa

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{Z}_p[x] &\longrightarrow F\\ p(x) &\mapsto p(g),\end{aligned}$$

   è un omomorfismo unitario e suriettivo di anelli. Dedurre che

$$F \cong \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(f(x))}$$

   per un certo polinomio $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ irriducibile di grado n.

(3) Sia D un dominio a fattorizzazione unica e sia $F := Q(D)$ il suo campo dei quozienti.
   (A) (5 punti) Sia $f(x) \in D[x] \subseteq F[x]$ un polinomio non constante monico (cioè con coefficiente direttore uguale a 1). Dimostrare che ogni fattore irriducibile monico di $f(x)$ in $F[x]$ è contenuto in $D[x]$.
   (B) (5 punti) Dimostrare che gli elementi irriducibili di $D[x]$ sono gli elementi irriducibili di D (visti come polinomi costanti) e i polinomi non costanti $f(x) \in D[x]$ tali che $C(f) \sim 1$ e $f(x)$ è irriducibile in $F[x]$.