

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2017/2018**  
**AL210 - Appello Laureandi - 2 Febbraio 2019**

**Avvertenza:** Svolgere il maggior numero di esercizi giustificando tutte le affermazioni fatte. **Non è consentito l'uso di alcun ausilio esterno** (libri, appunti, telefono, tablet, computer, calcolatrice...).

1. Sia  $D_4$  il gruppo delle isometrie del quadrato.
  - (a) Determinare tutti gli omomorfismi  $\varphi : D_4 \rightarrow \mathbb{Z}_8$ ;
  - (b) Determinare il nucleo e l'immagine di ognuno di tali omomorfismi;
  - (c) Per ogni omomorfismo  $\varphi$ , definire esplicitamente l'omomorfismo canonico  $D_4/\ker(\varphi) \rightarrow \text{Im}(\varphi)$  dato dal teorema di isomorfismo.
2. Siano  $G$  un gruppo e  $H$  un sottogruppo normale in  $G$  tale che  $G/H$  sia abeliano. Provare che ogni sottogruppo  $K$  di  $G$  tale che  $H \subseteq K$  è normale in  $G$ .
3. Sia  $(G, \cdot)$  un gruppo e sia  $\text{Aut}(G)$  il gruppo degli automorfismi di  $G$ .  
Sia data l'applicazione:

$$\star : \text{Aut}(G) \times G \rightarrow G, \quad (\varphi, x) \mapsto \varphi(x).$$

- (a) Verificare che  $\star$  è un'azione di  $\text{Aut}(G)$  su  $G$ ;
  - (b) Descrivere le sue orbite nel caso particolare in cui  $G = (\mathbb{Z}_{18}, +)$ .
4. Nell'anello  $\mathbb{Z}[i]$  si consideri l'ideale  $I := \langle 3 + i \rangle$ .
    - (a) Determinare l'ideale  $\mathbb{Z} \cap I$ ;
    - (b) Determinare tutti gli ideali dell'anello quoziente  $A := \mathbb{Z}[i]/I$  e stabilire quali di essi sono primi.
    - (c) Dimostrare che ogni ideale di  $A$  è formato da zero-divisori.
  5. Si consideri l'anello  $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}] = \{a + b\sqrt{-11}; a, b \in \mathbb{Z}\}$  e l'ideale  $I = \langle 1 + \sqrt{-11}, 3 \rangle$ .
    - (a) Stabilire se  $I$  è principale oppure no;
    - (b) Stabilire se  $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$  è un UFD.
  6. Si consideri l'omomorfismo di anelli

$$\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}; \quad f(X) \mapsto f(\sqrt[3]{5}).$$

- (a) Determinare il nucleo di  $\varphi$ .
- (b) Stabilire se l'immagine di  $\varphi$  è un campo.