Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO X DEL CORSO AL210 – ALGEBRA 2
4 SETTEMBRE 2019

(1) Si consideri il gruppo

$$G = \langle a, x, y | a^4 = 1, x^2 = 1, y^2 = a^2, xa = a^{-1}x, ya = ay, yx = xy \rangle.$$

(A) (3 punti) Dimostrare che ogni elemento di G si scrive in maniera unica nella forma (chiamata forma canonica)

$$a^i x^j y^k \text{ con } i \in \mathbb{Z}_4, j \in \mathbb{Z}_2, 0 \leq k \leq 1.$$

(B) (2 punti) Dimostrare che y appartiene al centro $Z(G)$ di G.

(C) (3 punti) Dimostrare che il sottogruppo $\langle a, x \rangle$ è isomorfo a D_4 (cioè il gruppo diedrale di ordine 8).

(D) (4 punti) Determinare le classi di coniugio di G.
[Suggerimento: usare che $y \in Z(G)$ e la descrizione delle classi di coniugio di $\langle a, x \rangle \cong D_4$.]

(E) (4 punti) Calcolare l'ordine di ciascun elemento di G.
[Suggerimento: usare che $y \in Z(G)$ e la descrizione dell'ordine degli elementi in $\langle a, x \rangle \cong D_4$.]

(F) (4 punti) Dimostrare che il centro $Z(G)$ di G è

$$Z(G) = \langle y \rangle$$

ed è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.

(G) (4 punti) Dimostrare che il sottogruppo $\langle a^2 \rangle$ è normale e che

$$G/\langle a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Dedurre che $[G, G] = \langle a^2 \rangle$.

(H) (4 punti) Dimostrare che $G/\langle y \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e dire se la successione esatta

$$0 \to \langle y \rangle \to G \to G/\langle y \rangle \to 0$$

spezza.

(I) (5 punti) Dimostrare che $\langle a \rangle$ è un sottogruppo normale di G e che $G/\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Dire se la successione esatta

$$0 \to \langle a \rangle \to G \to G/\langle a \rangle \to 0$$

spezza.

(J) (4 punti) Dimostrare che $\langle a^2, x \rangle$ è un sottogruppo normale di G e che

$$\langle a^2, x \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong G/\langle a^2, x \rangle.$$

(K) (5 punti) Dimostrare che $\langle y, x \rangle$ è un sottogruppo normale di G isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ e dire se la successione esatta

$$0 \to \langle y, x \rangle \to G \to G/\langle y, x \rangle \to 0$$

spezza.

(2) Sia D un dominio integrale e sia F il suo campo dei quozienti. Si considerino i domini integrali $D[x]$ e $F[x]$.

(A) (5 punti) Dimostrare che il campo dei quozienti di $D[x]$ è isomorfo al campo dei quozienti di $F[x]$.

(B) (4 punti) Mostrare che dato un elemento π non nullo e non invertibile in D, l'ideale (π, x) in $D[x]$ non è principale.
Dedurre che se $D[x]$ è un PID (=dominio a ideali principali) se e solo se D è un campo.

(C) (3 punti) Se F è un campo algebricamente chiuso allora gli elementi irriducibili di $F[x]$ sono associati a $x - a$, con $a \in F$.

(D) (4 punti) Gli elementi irriducibili di $\mathbb{R}[x]$ sono associati a $x - a$ con $a \in \mathbb{R}$ oppure a $x^2 + \alpha x + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha^2 - 4\beta^2 < 0$.
[Suggerimento: dato $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ si consideri prima la sua fattorizzazione in irriducibili in $\mathbb{C}[x]$ e poi si usi il coniugio complesso....]

(E) (5 punti) Dimostrare che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha^2 - 4\beta^2 < 0$ si ha un isomorfismo unitario di anelli

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2 + \alpha x + \beta)} \cong \mathbb{C}.$$

(3) Si consideri il seguente sottoanello unitario di $\mathbb{C}$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \ : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

(A) (4 punti) Mostrare che le unità di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sono date da

$$U(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]) = \{\pm 1\}.$$

[Suggerimento: dimostrare prima che $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ è un'unità se e solo se la sua norma $N(z) := z\overline{z}$ (dove $\overline{z}$ è il coniugio complesso di z) è uguale a 1.]

(B) (4 punti) Dimostrare che $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ sono due fattorizzazioni in irriducibili non equivalenti tra di loro.

(C) (4 punti) Dimostrare che gli elementi $2, 3, (1 + \sqrt{-5}), (1 - \sqrt{-5})$ sono irriducibili ma non primi.