SOLUZIONI DELLA PRIMA PROVA IN ITINERE DEL CORSO AL210 13 NOVEMBRE 2018

Si consideri il gruppo

$$G = \langle a, x | a^8, a^4 = x^2, x^{-1}ax = a^{-1} \rangle.$$

(1) (4 punti) Ogni elemento di G si scrive come una parola con lettere a, a^{-1}, x e x^{-1}, e dunque si scriverà nella forma

$$g = a^{i_1}x^{j_1}a^{i_2}x^{j_2} \dots a^{i_k}x^{j_k},$$

per un certo $k \in \mathbb{N}$ e certi elementi $i_1, j_1, \dots, i_k, j_k \in \mathbb{Z}$.

La prima relazione mi dice che posso considerare gli indici $i_1, \dots, i_k$ come elementi di $\mathbb{Z}_8$. La seconda relazione mi dice che posso semplificare l'espressione di g fino a ridurmi al caso $j_1, \dots, j_k \in \{0, 1\}$. Infine l'ultima relazione implica che

$$a^k x = xa^{-k} \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}_8, \tag{0.1}$$

e questo mi consente di semplificare l'espressione di g fino a ridurmi all'espressione in forma canonica $g = a^k$ oppure $g = a^k x$ con $k \in \mathbb{Z}_8$.

Osserviamo anche che l'espressione in forma canonica non si può ulteriormente semplificare perché non contiene x^2 né nessuna sottoparola della forma xa^k per qualche $0 \neq k \in \mathbb{Z}_8$.

(2) (8 punti se ci si accorgeva dell'errore, 4 altrimenti)

QUESTO È FALSO!!

Una maniera di vedere questo è la seguente. Il gruppo H ha cardinalità 16 e consiste dei seguenti elementi

$$\begin{cases} A^k = \begin{pmatrix} \zeta^k & 0 \\ 0 & \zeta^{5k} \end{pmatrix} & \text{con } k \in \mathbb{Z}_8, \\ A^k X = \begin{pmatrix} 0 & \zeta^k \\ \zeta^{5k+4} & 0 \end{pmatrix} & \text{con } k \in \mathbb{Z}_8. \end{cases}$$

Si vede facilmente che l'ordine degli elementi di H è uguale a:

$$o(A^k) = \frac{8}{\text{mcd}\{8, k\}},$$

$$o(A^k X) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 2, 6, \\ 4 & \text{se } k = 0, 4, \\ 8 & \text{se } k = 1, 3, 5, 7. \end{cases}$$

Confrontando l'ordine degli elementi di H con l'ordine degli elementi di G (vedi punto (4)), si scopre che G e H non hanno lo stesso numero di elementi con lo stesso ordine, e dunque non sono isomorfi.

[NOTA BENE: l'esercizio sarebbe stato giusto con la definizione

$$A = \begin{pmatrix} e^{\pi i/4} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/4} \end{pmatrix}.]$$

(3) (4 punti) Usando l'equazione (0.1) e la relazione $x^2 = a^4$, otteniamo che

$$\begin{cases} a^k a^l = a^{k+l}, \\ a^k(a^l x) = a^{k+l}x, \\ (a^k x)a^l = a^{k-l}x, \\ (a^k x)(a^l x) = a^{k-l}x^2 = a^{k-l+4}. \end{cases} \tag{0.2}$$

(4) (4 punti) Usando le regole di moltiplicazione (0.2), l'inverso si calcola nel seguente modo

$$\begin{cases} (a^k)^{-1} = a^{-k}, \\ (a^k x)^{-1} = a^{k+4}x. \end{cases} \tag{0.3}$$

Per calcolare l'ordine degli elementi della forma a^k, osserviamo che $\langle a \rangle$ è un sottogruppo di G isomorfo a $\mathbb{Z}_8$. Dunque l'ordine di a^k in G è come l'ordine di k in $\mathbb{Z}_8$ e dunque

$$o(a^k) = \frac{8}{\mathrm{mcd}\{8, k\}}.$$

Per calcolare l'ordine degli elementi $a^k x$, osserviamo che (usando (0.2))

$$(a^k x)^3 = (a^k x)^2 a^k x = a^{4+k}x \neq 1, \quad (a^k x)^4 = (a^k x)^3 a^k x = a^{4+k} x a^k x = a^8 = 1,$$

il che implica che

$$o(a^k x) = 4.$$

(5) (3 punti) Calcoliamo gli automorfismi interni $I(a^k)$ e $I(a^k x)$ usando (0.3) e (0.2)

$$\begin{cases} I(a^k)(a^l) = (a^{-k})a^l a^k = a^l, \\ I(a^k)(a^l x) = a^{-k} a^l x a^k = a^{l-2k}x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} I(a^k x)(a^l) = a^{k+4} x a^l a^k x = a^{k+1} x a^{k+l} x = a^{-l}, \\ I(a^k x)(a^l x) = a^{k+4} x a^l x a^k x = a^{k-l} a^k x = a^{2k-l}x. \end{cases}$$

(6) (3 punti) Come si vede dalle formule del punto (5), la classe di coniugio di a^l è uguale a $\{a^l, a^{-l}\}$, mentre la classe di coniugio di $a^l x$ consiste di tutti gli elementi della forma $a^{l'} x$ con l ed l' che hanno la stessa parità. Ne segue che le classi di coniugio di G sono

$$\{1\}, \left\{a, a^{-1}\right\}, \left\{a^2, a^{-2}\right\}, \left\{a^3, a^{-3}\right\}, \left\{a^4\right\}, \left\{a^k x \ : k \text{ è pari}\right\}, \left\{a^k x \ : k \text{ è dispari}\right\}.$$

(7) (5 punti) Il sottogruppo $\langle a \rangle$ è ciclico per definizione e consiste degli otto elementi a^k con $k \in \mathbb{Z}_8$. Dunque è isomorfo a $\mathbb{Z}_8$ con isomorfismo dato da

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_8 &\xrightarrow{\cong} \langle a \rangle, \\ k &\mapsto a^k. \end{aligned}$$

Inoltre $\langle a \rangle$ è normale perché contiene le classi di coniugio di tutti i suoi elementi per il punto (6). Il quoziente $G/\langle a \rangle$ ha ordine uguale a

$$|G/\langle a \rangle| = \frac{16}{8} = 2.$$

Siccome 2 è un numero primo, allora necessariamente $G/\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.

(8) (5 punti) Supponiamo che G è isomorfo ad un prodotto semidiretto interno $\langle a\rangle \rtimes S$ per qualche sottogruppo S di G. Allora per il punto (7), abbiamo che $S \cong G/\langle a\rangle \cong \mathbb{Z}_2$ e dunque S è generato da un elemento di ordine 2. Per il punto (4), l'unico elemento di ordine 2 di G è a^4. Tuttavia siccome $\langle a\rangle \cap \langle a^4\rangle \neq \emptyset$, allora non può essere che $G \cong \langle a\rangle \rtimes \langle a^4\rangle$, e dunque tale S non esiste.

(9) (6 punti) Usando (0.2) e (0.3) e la relazione (0.1), possiamo calcolare i commutatori di G:

$$\begin{cases} [a^k, a^l] = a^k a^l a^{-k} a^{-l} = 0, \\ [a^k, a^l x] = a^k a^l x a^{-k} a^{l+4} x = a^{k+l} a^{k-l-4} x^2 = a^{k+l} a^{k-l-4} a^4 = a^{2k}, \\ [a^k x, a^l x] = a^k x a^l x a^{k+4} x a^{l+4} x = a^k x a^l x a^{k+4} x a^{l+4} x = a^{k-l} x^2 a^{k+4} a^{-l-4} x^2 = a^{2(k-l)}. \end{cases} \tag{0.4}$$

Dalle formule di sopra, si vede che gli unici elementi che commutano con tutti gli altri elementi sono $a^0 = 1$ e a^4. Dunque il centro di G è uguale a

$$Z(G) = \langle a^4\rangle.$$

Il gruppo quoziente $G/Z(G)$ (che esiste perché il centro di un gruppo è sempre normale) ha cardinalità $|G|/|Z(G)| = 8$ e consiste dei seguenti elementi:

$$\overline{a^k} := a^k Z(G) \text{ e } \overline{a^k x} := a^k x Z(G) \quad \text{per } 0 \leq k \leq 3.$$

Notiamo che

$$\begin{cases} \overline{a}^k = \overline{a^k} & \text{per ogni } 0 \leq k \leq 3, \\ \overline{a}^k \overline{x} = \overline{a^k x} & \text{per ogni } 0 \leq k \leq 3, \\ \overline{a}^4 = a^4 Z(G) = \overline{a^0} \quad \text{e} \quad \overline{x}^2 = x^2 Z(G) = \overline{a^0}, \end{cases}$$

da cui deduciamo che $G/Z(G)$ è generato da $\overline{a}$ e $\overline{x}$, che hanno ordine rispettivamente 4 e 2. Inoltre, dall'equazione (0.1), abbiamo che

$$\overline{xa} = xaZ(G) = a^{-1}xZ(G) = \overline{a}^{-1}\overline{x}.$$

Dalla proprietà universale delle presentazioni, deduciamo che abbiamo un omomorfismo suriettivo

$$\begin{aligned} D_4 = \langle \sigma, \tau | \sigma^4, \tau^2, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau\rangle &\longrightarrow G/Z(G), \\ \sigma &\mapsto \overline{a}, \\ \tau &\mapsto \overline{x}, \end{aligned}$$

che allora deve essere un isomorfismo perché entrambi i gruppi hanno cardinalità 8.

(10) (6 punti) Dalle formule (0.4) per i commutatori, si vede che il sottogruppo dei commutatori è uguale a

$$[G, G] = \langle a^2\rangle.$$

Il gruppo quoziente $G/[G, G]$ (che esiste perché il sottogruppo dei commutatori è sempre normale) ha cardinalità uguale a $|G|/|[G, G]| = 16/4 = 4$ e consiste dei seguenti elementi

$$\overline{a^k} := a^k[G, G] \text{ e } \overline{a^k x} := a^k x[G, G] \quad \text{per } 0 \leq k \leq 1.$$

Notiamo che

$$\begin{cases} \overline{a}^2 = a^2[G, G] = \overline{a^0} \quad \text{e} \quad \overline{x}^2 = x^2[G, G] = a^4[G, G] = \overline{a^0}, \\ \overline{x} \cdot \overline{a} = xa[G, G] = a^{-1}x[G, G] = ax[G, G] = \overline{ax} = \overline{a} \cdot \overline{x}, \end{cases}$$

da cui deduciamo che abbiamo l'isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 &\xrightarrow{\cong} G/[G,G], \\ (1,0) &\mapsto \overline{a}, \\ (0,1) &\mapsto \overline{x}. \end{aligned}$$

(11) (8 punti) Osserviamo prima che, per ogni $s \in \mathbb{Z}_8^*$ e $t \in \mathbb{Z}_8$, gli elementi a^s e $a^t x$ generano G (perchè a^s genera $\langle a \rangle$ per le ipotesi su s) e soddisfano le relazioni

$$\begin{cases} (a^s)^8 = a^{8s} = 1, \\ (a^t x)^2 = a^t x a^t x = a^{t-t} x^2 = a^4 = (a^s)^4, \\ (a^t x)^{-1} a^s (a^t x) = a^{t+4} x a^s a^t x = a^{t+4} a^{-s-t} x^2 = a^{t+4} a^{-s-t} a^4 = (a^s)^{-1}. \end{cases}$$

Dunque, per la proprietá universale delle presentazioni, per ogni $s \in \mathbb{Z}_8^*$ e $t \in \mathbb{Z}_8$ risulta ben definito un unico automorfismo $\phi_{s,t} \in \mathrm{Aut}(G)$ tale che

$$\phi_{s,t}(a) = a^s \text{ e } \phi_{s,t}(x) = a^t x.$$

Mostriamo ora che gli automorfismi di cui sopra sono tutti e soli gli automorfismi di G. Sia $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$. Osserviamo che $\phi(a)$ ha ordine 8, $\phi(x)$ ha ordine 4 e che $\phi(a)$ e $\phi(x)$ generano G perchè un automorfismo manda generatori in generatori e preserva l'ordine degli elementi. Dal punto (4) deduciamo che $\phi(a) = a^s$ con $s \in (\mathbb{Z}_8)^* = \{1,3,5,7\}$. Inoltre $\phi(x)$ non può appartenere al sottogruppo $\langle \phi(a) \rangle = \langle a \rangle$ altrimenti $\phi(a)$ e $\phi(x)$ non sarebbero generatori di G. Dunque, sempre dal punto (4) deduciamo che $\phi(x) = a^t x$ per un certo $t \in \mathbb{Z}_8$. Deduciamo che $\phi = \phi_{s,t}$ perché i due automorfismi assumono gli stessi valori sui generatori a e x di G.

(12) (8 punti se ci si accorgeva dell'errore, 6 altrimenti) I sottogruppi $N_1 := \langle a^2, x \rangle$ e $N_2 := \langle a^2, a^2 x \rangle$ in realtá coincidono e sono uguali a:

$$N := N_1 = N_2 = \{a^0, a^2, a^4, a^6, a^0 x, a^2 x, a^4 x, a^6 x\}.$$

Il sottogruppo N è normale perché contiene tutte le classi di coniugio dei suoi elementi per il punto (6).

I generatori a^2 e x di N soddisfano le relazioni

$$\begin{cases} (a^2)^4 = a^8 = 1, \\ x^2 = a^4 = (a^2)^2, \\ x a^2 x^{-1} = a^{-2} x x^{-1} = (a^2)^{-1}, \end{cases}$$

Dunque, per la proprietá universale delle presentazioni, esiste un omomorfismo suriettivo dal gruppo dei quaternioni Q a N dato da:

$$\begin{aligned} Q = \langle z, w | z^4, w^2 = z^2, wzw^{-1} = z^{-1} \rangle &\longrightarrow N, \\ z &\mapsto a^2, \\ w &\mapsto x, \end{aligned}$$

e tale omomorfismo deve essere un isomorfismo in quanto entrambi i gruppi hanno cardinalità uguale a 8. Dunque N é isomorfo a Q e non a D_4!!

Il sottogruppo N non è caratteristico perchè l'automorfismo $\phi_{1,1}$ del punto (11) è tale che $\phi_{1,1}(N) = \langle a^2, ax \rangle \neq \langle a^2, x \rangle$.

(13) (i) (10 punti) Gli automorfismi di G sono tutti della forma $\phi_{s,t}$ come nel punto (11). La composizione di due tali automorfismi soddisfa

$$\begin{cases} (\phi_{s_1,t_1} \circ \phi_{s_2,t_2})(a) = \phi_{s_1,t_1}(a^{s_2}) = a^{s_1 s_2}, \\ (\phi_{s_1,t_1} \circ \phi_{s_2,t_2})(x) = \phi_{s_1,t_1}(a^{t_2}x) = a^{s_1 t_2} a^{t_1} x = a^{s_1 t_2 + t_1} x. \end{cases}$$

Dunque abbiamo che

$$\phi_{s_1,t_1} \circ \phi_{s_2,t_2} = \phi_{s_1 s_2, s_1 t_2 + t_1}, \tag{0.5}$$

da cui si deduce che

$$\mathrm{Aut}(G) = \mathbb{Z}_8 \rtimes_\theta (\mathbb{Z}_8)^*,$$

dove $\theta : \mathbb{Z}_8^* \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8) \cong \mathbb{Z}_8^*$ è l'identità.

(ii) Sappiamo dalla teoria che $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$. Dunque dal punto (9), sappiamo che $\mathrm{Inn}(G)$ è isomorfo a D_4 e dunque si può realizzare come il seguente prodotto semidiretto

$$\mathrm{Inn}(G) = \mathbb{Z}_4 \rtimes_\xi \mathbb{Z}_2,$$

dove $\xi : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_4^*$ manda 1 in -1.

(iii) Osserviamo innanzitutto che la cardinalità di $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ è uguale a

$$|\mathrm{Out}(G)| = |\mathrm{Aut}(g)|/|\mathrm{Inn}(G)| = 32/8 = 4.$$

Dal punto (5) deduciamo che un automorfismo $\phi_{s,t} \in \mathrm{Aut}(G)$ è interno se e solo se $s = 1, -1$ e $t \in \langle 2 \rangle \subset \mathbb{Z}_8$. Dunque $\mathrm{Out}(G)$ consiste dei seguenti 4 elementi

$$\begin{cases} \xi_{0,0} := \phi_{1,0}\,\mathrm{Inn}(G) = \{\phi_{\pm 1,k} \ : k \text{ è pari}\}, \\ \xi_{0,1} := \phi_{1,1}\,\mathrm{Inn}(G) = \{\phi_{\pm 1,h} \ : h \text{ è dispari}\}, \\ \xi_{1,0} := \phi_{3,2}\,\mathrm{Inn}(G) = \{\phi_{\pm 3,k} \ : k \text{ è pari}\}, \\ \xi_{1,1} := \phi_{3,1}\,\mathrm{Inn}(G) = \{\phi_{\pm 3,h} \ : h \text{ è dispari}\}. \end{cases}$$

Ora è facile vedere, usando (0.5), che $\xi_{0,0}$ è l'elemento neutro, $\xi_{0,1}$ e $\xi_{1,0}$ hanno ordine due, e che $\xi_{0,1}\xi_{1,0} = \xi_{1,1} = \xi_{1,0}\xi_{0,1}$. Questo implica che esiste un isomorfismo

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\cong} \mathrm{Out}(G),$$
$$(a,b) \mapsto \xi_{a,b}.$$