ESERCIZI SU SEMIGRUPPI, MONOIDI E GRUPPI

ESERCIZIO 1

Sia G un semigruppo.

(1) Dimostrare che G è un gruppo se e solo se
  (i) Esiste un elemento identità sinistro e, cioè tale che $a \cdot e = a$ per ogni $a \in G$;
  (ii) Esiste un inverso sinistro, cioè per ogni $a \in G$ esiste $a^{-1} \in G$ tale che $a^{-1}a = e$.

(2) Dimostrare che G è un gruppo se e solo se per ogni $a, b \in G$ le equazioni $ax = b$ e $ya = b$ hanno soluzioni in G.

(3) Se G è finito e G soddisfa la proprietà di *cancellazione destra*, cioè $ac = bc \Rightarrow a = b$, e quella sinistra, cio´e $ca = cb \Rightarrow a = b$, allora G è un gruppo.

  [Suggerimento (NUOVO): Guardare alla tabella di moltiplicazione degli elementi e mostrare che su ogni riga e ogni colonna appaiono tutti gli elementi di G una sola volta. Usare poi il punto precedente.]

(4) Dare un controesempio all'enunciato precedente nel caso di G infinito.

ESERCIZIO 2

Sia G un gruppo. Dimostrare che G è abeliano se e solo la mappa inversa

$$I : G \longrightarrow G,$$
$$a \mapsto a^{-1},$$

è un isomorfismo.

ESERCIZIO 3

Sia $(M, +)$ un monoide commutativo. Dimostrare che M è sottomonoide di un gruppo abeliano se e solo se M soddisfa la proprietà di cancellazione, cioè

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b.$$

[Suggerimento (CORRETTO): per l'implicazione difficile $\Leftarrow$, costruire un gruppo G che contiene M imitando la costruzione di $(\mathbb{Z}, +, 0)$ a partire da $(\mathbb{N}, +, 0)$.]

ESERCIZIO 4

Si dice che un gruppo G ha *esponente finito* se esiste $m > 0$ tale che $a^m = e$ per ogni $a \in G$. In tal caso, il più piccolo $m > 0$ che verifica tale proprietà si dice l'*esponente* di G.

(i) Dimostrare che se G ha esponente 2 allora G è abeliano.

(ii) Per ogni primo dispari p, dimostrare che il sottogruppo di $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_p)$ dato da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_p).$$

ha esponente p ma non è commutativo. Cosa succede in tale esempio per $p = 2$?

ESERCIZIO 5 (NUOVO)

Costruire una mappa $f : (\mathbb{Z}, 1, \cdot) \to (\mathbb{Z}, 1, \cdot)$ tale che $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ ma $f(1) \neq 1$.