ESERCIZI SU SOTTOGRUPPI E QUOZIENTI

ESERCIZIO 1

Sia G un gruppo. Consideriamo il sottoinsieme (chiamato il *centro* di G)

$$Z(G) := \{a \in G \ : ab = ba \quad \text{per ogni } b \in G\}.$$

Dimostrare che $Z(G)$ è un sottogruppo normale di G.

ESERCIZIO 2 (NUOVA VERSIONE)

Sia G un gruppo. Dati due elementi $a, b \in G$, l'elemento $[a, b] := aba^{-1}b^{-1} \in G$ si dice commutatore di a e b. Consideriamo il sottoinsieme (chiamato il *sottogruppo commutatore* di G) generato dai commutatori, cioè

$$[G, G] := \langle \{[a, b] \ : a, b \in G\} \rangle.$$

Dimostrare che:

(i) Dimostrare che $ab = [a, b]ba$ per ogni $a, b \in G$.
(ii) $[G, G]$ è un sottogruppo normale.
[Suggerimento: usare il punto precedente per spostare la posizione di elementi successivi in un prodotto.]
(iii) $G^{\mathrm{ab}} := G/[G, G]$ è un gruppo abeliano (chiamato l'*abelianizzato* di G).
(iv) $[G, G]$ è il più piccolo sottogruppo normale N di G tale che G/N è abeliano.
(v) Dimostrare che se N è un sottogruppo di G che contiene $[G, G]$ allora N è un sottogruppo normale di G.

ESERCIZIO 3

Sia G un gruppo e H un sottogruppo di indice 2. Dimostrare che H è normale.

ESERCIZIO 4

Sia G un gruppo e siano H e K due sottogruppi di G.

(i) Dimostrare che HK è un sottogruppo di G se e solo so $HK = KH$:
(ii) Dimostrare che se H è un sottogruppo normale, allora HK è un sottogruppo.
(iii) Se H e K sono finiti, allora si ha la seguente formula per la cardinalità del prodotto HK:

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

[Suggerimento (NUOVO): Studiare le fibre del morfismo $\phi : H \times K \to G$ che manda (h, k) in hk.]

ESERCIZIO 5

Sia G un gruppo e siano K e N due sottogruppi di G, con N normale in G.

(i) Dimostrare che $N \cap K$ è un sottogruppo normale di K;
(ii) Dimostrare che $NK = KN$ è il sottogruppo generato da $K \cup N$.
(iii) Dimostrare che N è un sottogruppo normale di NK.
(iv) Dimostrare che se anche H è normale, allora HK è normale.

ESERCIZIO 6

Sia G un gruppo finito e siano H e K due sottogruppi di G.

Dimostrare che per ogni $x \in G$, la cardinalità di HxK (che è detta la classe laterale doppia di x rispetto alla coppia (H, K)) è uguale a

$$|HxK| = |H|[K : x^{-1}Hx \cap K].$$

ESERCIZIO 7

Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo. Si consideri il sottoinsieme (chiamato *normalizzatore* di H)

$$N(H) := \{a \in G \, aHa^{-1} = H\} \subseteq G.$$

Dimostrare che:

(i) $N(H)$ è un sottogruppo di G che contiene H.

(ii) H è un sottogruppo normale di $N(H)$.

(iii) $N(H)$ è il più grande sottogruppo di G contente H tale che H è normale in $N(H)$. In particolare, H è normale se e solo se $N(H) = G$.

ESERCIZIO 8

Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo. Si consideri il sottoinsieme (chiamato *la chiusura normale* di H)

$$\langle H \rangle^G := \bigcup_{a \in G} aHa^{-1} \subseteq G.$$

Dimostrare che:

(i) $\langle H \rangle^G$ è un sottogruppo normale di G che contiene H.

(ii) $\langle H \rangle^G$ è il più piccolo sottogruppo normale di G contente H.

(iii) (NUOVO) Sia S un sottoinsieme di G e sia $\langle S \rangle$ il sottogruppo generato da S. Mostrare che

$$\langle S \rangle^G = \langle \bigcup_{a \in G} aSa^{-1} \rangle.$$

ESERCIZIO 9

Sia G un gruppo finito.

(i) Dimostrare che se G non ha sottogruppi non banali (cioè diversi da $\{1\}$ e G), allora $G \cong \mathbb{Z}_p$ per un certo primo p.

(ii) Dimostrare che se G ha cardinalità uguale ad un primo p, allora $G \cong \mathbb{Z}_p$.

ESERCIZIO 10

Si consideri il gruppo $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ con moltiplicazione

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac, ad + b) \quad \text{ed elementro neutro } 1 = (1, 0).$$

(i) Dimostrare che $G = (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \cdot, 1)$ è un gruppo.

(ii) Dimostrare che $\mathbb{R}^* = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}^*\}$ è un sottogruppo non normale di G.

(iii) Dimostrare che $\mathbb{R} = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale di G e $G/\mathbb{R} \cong (\mathbb{R}^*, \cdot, 1)$.

ESERCIZIO 11

Si consideri il gruppo ciclico infinito $C_\infty := \mathbb{Z}$.

(i) Dimostrare che l'ordine di un elemento $n \in \mathbb{Z}$ é dato da

$$o(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ +\infty & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

(ii) Dimostrare che ogni sottogruppo di $\mathbb{Z}$ è della forma $\langle n \rangle$ per un unico $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Dimostrare che $\langle n \rangle \cap \langle m \rangle = \langle \text{mcm}(m, n) \rangle$ e che $\langle n \rangle + \langle m \rangle = \langle \text{mcd}(m, n) \rangle$.

(iv) Dimostrare che $\mathbb{Z}/\langle n\rangle \cong \mathbb{Z}_n$.

ESERCIZIO 12

Si consideri il gruppo ciclico $C_n := \mathbb{Z}_n$ di ordine $n \geq 1$.

(i) Dimostrare che l'ordine di un elemento $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$ é dato da
$$o(\overline{m}) = \frac{n}{\mathrm{mcd}(m,n)}.$$
(ii) Dimostrare che ogni sottogruppo di $\mathbb{Z}_n$ è della forma $\langle \overline{m}\rangle$ per un unico divisore positivo m di n.

(iii) Dimostrare che $\mathbb{Z}_n/\langle \overline{m}\rangle \cong \mathbb{Z}_{n/m}$.

ESERCIZIO 13

Si consideri il gruppo $\mathbb{Q}$ munito dell'addizione e il suo sottogruppo $\mathbb{Z}$.

(i) Dimostrare che nel gruppo quoziente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, ogni elemento ha ordine finito e calcolare l'ordine di $\overline{p/q}$.

(ii) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ esiste uno ed un solo sottogruppo di ordine n e mostrare che tale sottogruppo è ciclico.

ESERCIZIO 14

Si consideri il gruppo S_n.

(i) Dimostrare che per ogni permutazione $\sigma \in S_n$, vale che
$$\sigma(i_1 \cdots i_r)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)).$$
(ii) Dimostrare che S_n è generato dalle $n-1$ trasposizioni $\{(12),(13),\ldots,(1n)\}$ e anche dalle $n-1$ trasposizioni $\{(12),(23),\ldots,(n-1)n\}$.

(iii) Dimostrare che S_n è generato da (12) e $(1\cdots n)$.

(iv) Data una partizione di $n = n_1 + \ldots + n_r$, dimostrare usando il teorema di Lagrange che $n!$ è divisibile per $\prod_{i=0}^{r} n_i!$.

(v) Trovare tutti i sottogruppi normali di S_3, S_4, A_3 e A_4 e determinare i loro rispettivi quozienti.

ESERCIZIO 15

Si consideri il gruppo diedrale $D_n := \{\sigma^i, \sigma^i\tau : 0 \leq i < n\}$ con il prodotto univocamente determinato da
$$\sigma^n = 1, \quad \tau^2 = 1, \quad \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau.$$
(i) Dimostrare che D_n è isomorfo al sottogruppo di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ generato da
$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$
(ii) Dimostrare che D_n è isomorfo al sottogruppo di S_n generato dal n-ciclo $(12\ldots n)$ e dalla permutazione
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \ldots & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 16

Mostrare che i gruppi diedrali $\{D_n\}_{n\geq 2}$ sono tutti e solo i gruppi finiti generati da due elementi distinti di ordine 2.

[Suggerimento: D_n è generato da $\sigma\tau$ e τ. Viceversa se $G = \langle x,y\rangle$ con $o(x) = o(y) = 2$ e $o(xy) = n$, mostrare che $G \cong D_n$.

ESERCIZIO 17

Si consideri il gruppo diedrale finito D_n.

(i) Determinare l'ordine di ciascun elemento di D_n.

(ii) Dimostrare che i sottogruppi di D_n sono

(a) $\langle \sigma^m \rangle$ con $1 \leq m$ che divide n;

(b) $\langle \sigma^m, \sigma^r \tau \rangle$ con $1 \leq m$ che divide n e $0 \leq r < m$.

Mostrare che ciascuno di essi e' ciclico o diedrale, e calcolarne l'ordine.

(iii) Determinare quali sottogruppi sono coniugati tra di loro.

(iv) Dimostrare che i sottogruppi normali di D_n sono

(a) $\langle \sigma^m \rangle$ con $1 \leq m$ che divide n;

(b) (solo per n pari): $\langle \sigma^2, \tau \rangle$ e $\langle \sigma^2, \sigma\tau \rangle$.

(v) Mostrare che i quozienti di D_n sono ciclici o diedrali e calcolarli esplicitamente.

(vi) Calcolare il centro e il sottogruppo commutatore di D_n.

ESERCIZIO 18

Si consideri il gruppo (chiamato *gruppo dei quaternioni*) $Q = \{e, \overline{e}, i, \overline{i}, j, \overline{j}, k, \overline{k}\}$ con identità e e regole di moltiplicazione

$$\begin{cases} \overline{e}^2 = e, \quad \overline{i} = i\overline{e} = \overline{e}i, \quad \overline{j} = j\overline{e} = \overline{e}j, \quad \overline{k} = k\overline{e} = \overline{e}k, \\ i^2 = j^2 = k^2 = \overline{e}, \\ ij = \overline{j}i = k, \quad jk = k\overline{j} = i, \quad ki = i\overline{k} = j. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che Q è isomorfo al sottogruppo di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ con elementi

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) Dimostrare che Q è isomorfo al gruppo con elementi $\{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ dove e è l'identità e le regole di moltiplicazione date da

$$a^4 = e, \quad b^2 = a^2, \quad ba = a^3b.$$

(iii) Calcolare l'ordine di ciascun elemento.

(iv) Dimostrare che il centro di Q è $Z(Q) = \{e, \overline{e}\}$ e che $Q/Z(Q) \cong D_2$.

(v) Dimostrare che il sottogruppo commutatore $[Q, Q]$ è uguale al centro $Z(Q)$.

(vi) Dimostrare che i sottogruppi non banali di Q sono $Z(Q)$, $\{i, \overline{i}, \overline{e}, e\}$, $\{j, \overline{j}, \overline{e}, e\}$, $\{k, \overline{k}, \overline{e}, e\}$.

(vii) Dimostrare che tutti i sottogruppi di Q sono normali e determinare i rispettivi quozienti.

(viii) Mostrare che Q non è isomorfo a D_4.

ESERCIZIO 19

Si consideri il gruppo (chiamato *gruppo diedrale infinito*) $D_\infty = \{\sigma^i, \sigma^i\tau \ : i \in \mathbb{Z}\}$ generato da σ e τ con identitá $e = \sigma^0$ e regole di moltiplicazione date da

$$\tau^2, \quad \tau\sigma^i = \sigma^{-i}\tau.$$

(i) Dimostrare che D_∞ è isomorfo al sottogruppo di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a = \pm 1, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(ii) Dimostrare che D_∞ è generato dai due elementi di ordine due

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ed è l'unico gruppo infinito generato da due elementi di ordine due.

(iii) Classificare i sottogruppi di D_∞ e dire quali di essi è normale.

(iv) Per ciascun sottogruppo normale, determinare la classe di isomorfismo del quoziente.

(v) Calcolare il centro e il sottogruppo dei commutatori di D_∞.