ESERCIZI SU OMOMORFISMI, PRESENTAZIONI

ESERCIZIO 1

Sia $f : G \to H$ un omomorfismo con H abeliano. Dimostrare che ogni sottogruppo di G che contiene $\ker f$ è abeliano.

ESERCIZIO 2

Sia $f : G \to H$ un omomorfismo. Dimostrare che per ogni sottogruppo K di G vale che $f^{-1}(f(K)) = \ker(f) \cdot K$. Dedurre che $f^{-1}(f(K)) = K$ se e solo se $\ker(f) \subseteq K$.

ESERCIZIO 3

Dimostrare che:

(i) $\mathbb{Z} = \langle s | \rangle = F_1$.
(ii) $\mathbb{Z}_n = \langle s | s^n \rangle$.

ESERCIZIO 4

Dimostrare che:

(i) $D_n = \langle s, t | s^n, t^2, st = ts^{-1} \rangle$.
(ii) $D_n = \langle x, y | x^2, y^2, (xy)^n \rangle$.

ESERCIZIO 5

Dimostrare che il gruppo diedrale infinito D_∞ (introdotto negli Esercizi 2) ammette le seguenti presentazioni:

(i) $D_\infty = \langle s, t | t^2, st = ts^{-1} \rangle$.
(ii) $D_\infty = \langle x, y | x^2, y^2 \rangle$.

ESERCIZIO 6

Dimostrare che il gruppo dei quaternioni Q (introdotto negli Esercizi 2) ammette la seguente presentazione

$$Q = \langle x, y | x^4, y^2 = x^2, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle.$$

ESERCIZIO 7

Sia G un gruppo finito. Dimostrare che G ammette la seguente presentazione finita

$$G = \langle G \,|\, \{abc^{-1} \ : \text{per ogni } a, b, c \in G \text{ tale che } ab = c\} \rangle.$$

ESERCIZIO 8

Dimostrare che:

(i) Se $0 \leq n < m$ allora F_n è isomorfo sia ad un sottogruppo di F_m che ad un suo quoziente.
(ii) Dimostrare che $F_1 \times F_1$ non è un gruppo libero.
(iii) Dimostrare che $Z(F_n) = \{1\}$ se $n \geq 2$.

ESERCIZIO 9

Dimostrare che esiste un omomorfismo suriettivo

$$\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} | \sigma_i^2, (\sigma_i\sigma_j)^2 \text{ se } j > i+1, (\sigma_i\sigma_{i+1})^3 \rangle \longrightarrow S_n$$

che manda σ_i nella trasposizione $(i, i+1)$.

ESERCIZIO 10

Dimostrare che esiste un omomorfismo suriettivo

$$\langle x_1, \dots, x_{n-1} | x_i^2, (x_i x_j)^3 \text{ per ogni } i \neq j, (x_i x_j x_i x_k)^2 \text{per ogni } i \neq j, i \neq, j \neq k \rangle \longrightarrow S_n$$

che manda x_i nella trasposizione $(1, i)$.

ESERCIZIO 12

Dimostrare che esiste un omomorfismo suriettivo

$$\langle S, T | S^2, (ST)^3 \rangle \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/(\pm I_2),$$

$$S \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ è il gruppo delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Z}$ con determinante uguale a ± 1.

ESERCIZIO 13 (La funzione segno tramite le inversioni)

Consideriamo la funzione

$$\widetilde{\mathrm{sgn}} : S_n \longrightarrow \{\pm 1\},$$

$$\sigma \mapsto (-1)^{|\operatorname{inv}(\sigma)|},$$

dove $\operatorname{inv}(\sigma) := \{(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \ : i < j \text{ and } \sigma(i) > \sigma(j)\}$.

(i) Mostrare che se τ è una trasposizione, allora $\widetilde{\mathrm{sgn}}(\tau) = 1$.

(ii) Sia P l'insieme delle funzioni (non necessariamente lineari) da $f : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}$. Per ogni $f \in P$ e ogni $\sigma \in S_n$, si definisca $\sigma f \in P$ tramite

$$(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Dimostrare che per ogni $\sigma, \tau \in S_n$ vale che

$$\sigma(\tau f) = (\sigma\tau) f.$$

(iii) Si consideri la funzione $p : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}$ definita da

$$f(x_1, \dots, x_n) := \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

Dimostrare che per ogni $\sigma \in S_n$ vale che

$$\sigma p = \widetilde{\mathrm{sgn}}(\sigma) p.$$

(iv) Mettendo insieme (ii) e (iii), si deduca che $\widetilde{\mathrm{sgn}}$ è un omomorfismo.

(v) Mettendo insieme (i) e (iv), si deduca che $\mathrm{sgn} = \widetilde{\mathrm{sgn}}$.

[Suggerimento: si usi che S_n è generato da trasposizioni.]