ESERCIZI SU PRODOTTI DIRETTI E PRODOTTI LIBERI

ESERCIZIO 1

Siano G ed H due gruppi e si consideri il prodotto $G \times H$. Siano $g \in G$ e $h \in H$ due elementi di ordine finito. Dimostrare che $(g, h) \in G \times H$ ha ordine finito uguale a

$$o((g, h)) = \mathrm{mcm}(o(g), o(h)).$$

ESERCIZIO 2

Dati due interi $n.m \in \mathbb{N}_{>0}$ le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$;
(ii) $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ e' un gruppo ciclico;
(iii) n ed m sono coprimi.

ESERCIZIO 3

Mostrare che:

(i) $D_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
(ii) $D_3 \cong S_3$.
(iii) D_4 si può realizzare come sottogruppo di S_4. In quanti modi possibili?

ESERCIZIO 4(NUOVO)

Dimostrare che il gruppo ciclo finito $\mathbb{Z}_n$ si scrive come prodotto diretto interno di due sottogruppi non banali se e solo se n non è una potenza di un primo, nel qual caso tutte le tali scritture sono

$$\mathbb{Z}_n \cong \langle \overline{m} \rangle \times \langle \overline{n/m} \rangle$$

al variare di tutti i divisori non banali m di n tali che m e n/m sono primi tra loro.

ESERCIZIO 5

Dimostrare che il gruppo diedrale $D_n = \langle \sigma, \tau \,|\, \tau^2, \sigma^n, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle$ si scrive come prodotto diretto interno di due sottogruppi non banali se e solo se $n = 2m$ con m dispari, nel qual caso le uniche tali scritture sono

$$D_n \cong \langle \sigma^m \rangle \times \langle \sigma^2, \tau \rangle \cong \langle \sigma^m \rangle \times \langle \sigma^2, \sigma\tau \rangle.$$

ESERCIZIO 6

Dimostrare che il gruppo simmetrico S_n non si può scrivere come prodotto diretto interno di due sottogruppi non banali.

ESERCIZIO 7

Si considerino due gruppi G_1 e G_2 con presentazioni $G_i = \langle X_i | R_i \rangle$. Dimostrare che:

(i) Il prodotto libero $G_1 * G_2$ ha presentazione $(X_1 \cup X_2, R_1 \cup R_2)$.
(ii) Il prodotto diretto $G_1 \times G_2$ ha presentazione

$$(X_1 \cup X_2, R_1 \cup R_2 \cup \{xy = yx \ : \ \text{per ogni } x \in X_1, y \in X_2\}).$$

ESERCIZIO 8

Un gruppo G è isomorfo al prodotto dei sottogruppi $H_1, \ldots, H_k$ (con $k \geq 2$) se e solo se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $G = H_1 \ldots H_k$;
(ii) Per ogni $1 \leq j \leq k$, si ha che $H_j \cap (H_1 \ldots H_{j-1} H_{j+1} \ldots H_n) = \{e\}$;

(iii) Ciascuno dei sottogruppi H_j è normale in G

oppure

(iii)' I sottogruppi H_i commutano a due a due.

[Suggerimento: usare l'induzione su k. Il caso base $k = 2$ è stato visto a lezione.]

ESERCIZIO 9

Sia H un sottogruppo di $G_1 \times G_2$ tali che le restrizioni a H delle proiezioni (per $i = 1, 2$)

$$p_i : H \hookrightarrow G_1 \times G_2 \xrightarrow{\pi_i} G_i$$

siano suriettive. Si considerino i sottogruppi $N_1 := \ker p_2$ e $N_2 := \ker p_1$ di H.

(1) Dimostrare che N_1 è un sottogruppo normale di $\ker \pi_2 \cong G_1$ e N_2 è un sottogruppo normale di $\ker \pi_1 \cong G_2$.

(2) Sia $\widetilde{H}$ l'immagine di H tramite l'omomorfismo $H \hookrightarrow G_1 \times G_2 \twoheadrightarrow (G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2)$. Dimostrare che le restrizioni a $\widetilde{H}$ delle due proiezioni

$$\widetilde{H} \hookrightarrow (G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \twoheadrightarrow G_i/N_i$$

sono isomorfismi.

ESERCIZIO 10

Sia FX il gruppo libero su X e sia $Y \subseteq X$. Si mostri che

$$\langle X | Y \rangle \cong F(X \setminus Y).$$