ESERCIZI SU AUTOMORFISMI, PRODOTTI SEMIDIRETTI ED ESTENSIONI

ESERCIZIO 1

Per un primo p e $n \geq 1$, si consideri il gruppo $(\mathbb{Z}_p^n, \underline{0}, +)$ soggiacente lo spazio vettoriale $\mathbb{Z}_p^n$ sul campo $\mathbb{Z}_p$. Dimostrare che

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p^n) \cong \mathrm{Out}(\mathbb{Z}_p^n) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p).$$

ESERCIZIO 2

Dimostrare che

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Out}(\mathbb{Z}) \cong \{\pm 1\}.$$

ESERCIZIO 3

Per $n \geq 1$, sia $(\mathbb{Z}^n, \underline{0}, +)$ il gruppo commutativo formato dai vettori di n elementi di $\mathbb{Z}$ con l'operazione di somma di vettori e l'elemento neutro uguale al vettore nullo $\underline{0}$. Dimostrare che

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n) \cong \mathrm{Out}(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}),$$

dove $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ è il gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{Z}$ con determinante ± 1 rispetto alla composizione di matrici (verificare anche che $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ è un gruppo).

ESERCIZIO 4

Dimostrare che:

(i) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Out}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \cong S_3$. [Suggerimento: per i primi due isomorfismi si veda l'Esercizio di sopra.]

(ii) $\mathrm{Aut}(S_3) \cong \mathrm{Inn}(S_3) \cong S_3$.

ESERCIZIO 5

Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice *caratteristico* se $\alpha(H) = H$ per ogni $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$.

(i) Mostrare che $H < G$ è caratteristico se $\alpha(H) \subset H$ per ogni $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$.

(ii) Mostrare che un sottogruppo caratteristico è normale.

(iii) Dimostrare che tutti i sottogruppi non banali di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ sono normali ma nessuno di loro è caratteristico.

(iv) Sia G un gruppo e si considerino due sottogruppi $H < N < G$. Dimostrare che se N è caratteristico in G e H è caratteristico in N, allora H è caratteristico in G [cioè la proprietà di essere un sottogruppo caratteristico è transitiva.]

(v) Si consideri la catena di inclusioni $\langle \tau \rangle < \langle \tau, \sigma^2 \rangle < D_4$. Dimostrare che ciascuno sottogruppo è normale nel successivo ma $\langle \tau \rangle$ non è normale in D_4 [e dunque la proprietà di essere un sottogruppo normale non è transitiva.]

ESERCIZIO 6

Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo di indice due. Dimostrare che $G \cong H \rtimes \mathbb{Z}_2$.

ESERCIZIO 7

Dimostrare che il gruppo diedrale D_n è isomorfo al prodotto semidiretto $\mathbb{Z}_n \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$ rispetto a

$$\theta : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n^*,$$
$$\overline{1} \mapsto \overline{-1}.$$

ESERCIZIO 8

Sia K un campo e sia $\mathrm{GL}_n(K)$ il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti in K. Si considerino i seguenti insiemi:

- T è l'insieme delle matrici triangolari superiori;
- D è l'insieme delle matrici diagonali;
- U è l'insieme delle matrici triangolari superiori con 1 sulla diagonale.

Dimostrare che T, D, U sono sottogruppi di $\mathrm{GL}_n(K)$ e che $T \cong U \rtimes D$.

ESERCIZIO 9

Mostrare che la successione esatta

$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z} \to 0,$$

dove i è la moltiplicazione per p e π è la proiezione naturale, non spezza.

ESERCIZIO 10

Dire per quali $n \in \mathbb{N}_{>0}$ il gruppo $\mathbb{Z}_n$ è un prodotto semidiretto non banale. [Suggerimento: Ci si può ridurre al prodotto?]

ESERCIZIO 11

Si consideri il gruppo dei quaternioni

$$Q = \langle x, y | x^4, y^2 = x^2, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle.$$

(i) Mostrare che $\mathrm{Inn}(Q) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
(ii) Mostrare che $\mathrm{Aut}(Q) \cong S_4$.
(iii) Esplicitare il morfismo $\mathrm{Inn}(Q) \to \mathrm{Aut}(Q)$ in termini delle identificazioni del punto precedente e calcolare $\mathrm{Out}(Q)$.
(iv) Dimostrare che Q non può essere scritto come prodotto semidiretto non banale.

ESERCIZIO 12

Si consideri il gruppo diedrale D_n.

(i) Calcolare $\mathrm{Inn}(D_n)$, $\mathrm{Aut}(D_n)$ e $\mathrm{Out}(D_n)$.
(ii) Determinare in quanti modi D_n si può scrivere come prodotto semidiretto di suoi sottogruppi.