ESERCIZI SU GRUPPI ABELIANI

ESERCIZIO 1

Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una collezione di gruppi abeliani. Mostrare che $\oplus_{i\in I} A_i$ è l'abelianizzato di $\prod^*_{i\in I} A_i$.

[Suggerimento (NUOVO): usare le proprietà universali del prodotto libero, dell'abelianizzato e della somma diretta oppure scrivere esplicitamente l'isomorfismo.]

ESERCIZIO 2

Sia X un insieme. Dimostrare che $\mathbb{Z}^X$ è l'abelianizzato di FX.

[Suggerimento (NUOVO): usare le proprietà universali del gruppo libero, dell'abelianizzato e del gruppo abeliano libero oppure oppure scrivere esplicitamente l'isomorfismo.]

ESERCIZIO 3

Un gruppo abeliano libero è un gruppo libero se e solo se è ciclico.

ESERCIZIO 4

Sia F un gruppo abeliano libero e sia X una base. Dimostrare che per ogni $Y \subseteq X$, si ha $F/\langle Y\rangle \cong \mathbb{Z}^{X\setminus Y}$.

ESERCIZIO 5

(i) Sia G un gruppo abeliano generato da n elementi. Dimostrare che ogni sottogruppo H di G può essere generato da $m \leq n$ elementi.

(ii) Sia G il sottogruppo di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ generato da $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e sia H il sottogruppo di G formato dagli elementi di G le cui due entrate sulla diagonale sono 1. Dimostrare che H non è finitamente generato.

ESERCIZIO 6

Sia F un gruppo abeliano libero di rango n, cioè $F \cong \mathbb{Z}^n$, per qualche $n \geq 1$. Dimostrare che:

(i) Un insieme di n elementi linearmente indipendenti non forma necessariamente una base di F.

(ii) Un insieme di $m < n$ elementi linearmente indipendenti non può necessariamente essere esteso da una base di F.

(iii) Un insieme di generatori di F non necessariamente contiene una base di F.

ESERCIZIO 7

(i) Dimostrare che un gruppo abeliano finitemante generato senza elementi di ordine finito è un gruppo abeliano libero.

(ii) Dimostrare che $\mathbb{Q}$ è un gruppo abeliano non finitamente generato, senza elementi di ordine finito e non isomorfo ad un gruppo abeliano libero.

ESERCIZIO 8

Dimostrare che il gruppo $(\mathbb{Q}_{>0}, ., 1)$ è un gruppo abeliano libero con base $\{p : p \,\text{primo}\}$.

ESERCIZIO 9

Sia G un gruppo abeliano finito di ordine n.

(i) Dimostrare che per ogni divisore m di n, G ammette un sottogruppo di ordine m.

(ii) Dimostrare che se G ha due sottogruppi di ordine m_1 e m_2 allora G ha un sottogruppo di ordine $\mathrm{mcm}(m_1, m_2)$.

(iii) Dimostrare che se H è un sottogruppo di G, allora G ammette un sottogruppo $\widetilde{H}$ isomorfo a G/H. È vero che G è la somma diretta di H e $\widetilde{H}$?

ESERCIZIO 10

Si consideri il gruppo $\mathbb{Z}$. Dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}_{>0}$ e per ogni primo p si ha:

(i) $m\mathbb{Z} = \langle m \rangle$;

(ii) $\mathbb{Z}[m] = \mathbb{Z}(p) = \mathbb{Z}_{\text{tor}} = (0)$.

ESERCIZIO 11

Si consideri il gruppo ciclico $\mathbb{Z}_n$ di ordine n. Dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}_{>0}$ e per ogni primo p si ha:

(i) $m\mathbb{Z}_n = \text{mcd}(m,n)\mathbb{Z}_n = \langle \text{mcd}(m,n) \rangle \cong \mathbb{Z}_{n/\text{mcd}(m,n)}$.

(ii) $(\mathbb{Z}_n)_{\text{tor}} = \mathbb{Z}_n$.

(iii) $\mathbb{Z}_n[m] = \mathbb{Z}_n[\text{mcd}(m,n)] = \langle \frac{n}{\text{mcd}(m,n)} \rangle \cong \mathbb{Z}_{\text{mcd}(m,n)}$.

(iv) $\mathbb{Z}_n(p) = \langle n' \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^r}$ dove r è tale che $n = p^r n'$ con n' primo con n.

ESERCIZIO 12

(i) Si determinino tutti i gruppi abeliani finiti di ordine $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

(ii) Sia n un un numero naturale maggiore di 1 e si consideri la sua fattorizzazione prima $n = p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}$. Si dimostri che il numero di gruppi abeliano di ordine n è uguale a $\prod_{i=1}^r \sigma(e_i)$, dove $\sigma(m)$ è il numero di partizioni di m.

ESERCIZIO 13

Sia G un gruppo abeliano finito.

(i) Dimostrare che G è ciclico se e solo se G non contiene un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ per ogni primo p.

(ii) Dimostrare che G è ciclico se e solo se, per ogni $n \geq 1$, G contiene al più n elementi di ordine che divide n.

ESERCIZIO 14

Sia F un campo e sia G un sottogruppo finito di $(F^*, ., 1)$. Dimostrare che G è ciclico. [Suggerimento: si applichi il secondo criterio di ciclità dell'esercizio precendente osservando che gli elementi di F^* di ordine che divide n sono esattamente le radici del polinomio $X^n - 1 \in F[X]$. Quante radici può avere questo polinomio?]

ESERCIZIO 15

Dimostrare che ogni sottogruppo finito di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è ciclico.

ESERCIZIO 16

Sia G un gruppo abeliano finitamente generato e sia H un suo sottogruppo. Dimostrare che

$$\text{rk}(G) = \text{rk}(H) + \text{rk}(G/H).$$

ESERCIZIO 17

Mostrare che i fattori invarianti di $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ sono:

- $\text{mcd}(m,n)$ e $\text{mcm}(m,n)$ se $\text{mcd}(m,n) > 1$;
- mn se $\text{mcd}(m,n) = 1$.

ESERCIZIO 18

Sia G un gruppo abeliano e sia p un primo. Mostrare che:

(i) $G(p)$ è il più grande p-sottogruppo, cioè il più grande sottogruppo in cui ogni elemento ha ordine finito uguale ad una potenza di p.

(ii) $G_{\mathrm{tor}} = \bigoplus_{p\,\mathrm{primo}} G(p)$.

ESERCIZIO 19

Sia G un abeliano finito.

(i) Mostrare che G è un p-gruppo, cioé ogni elemento ha ordine una potenza di p, se e solo se la cardinalità di G è una potenza di p.

Assumiamo d'ora in poi che G sia un p-gruppo.

(ii) Mostrare che per ogni $n \geq 0$, vale che

$$\frac{p^n G \cap G[p]}{p^{n+1} G \cap G[p]} \cong \mathbb{Z}_p^{k_n},$$

dove k_n è il numero dei sommandi di G di ordine p^{n+1}.

ESERCIZIO 20

Sia G un gruppo abeliano finito. Un *carattere* di G è un omomorfismo $\chi : G \to \mathbb{C}^*$.

(i) (NUOVO) Mostrare che l'insieme dei caratteri di G è un gruppo abeliano, denotato con $G^\vee$ e chiamato *gruppo duale* di G, rispetto alla somma

$$(\chi + \mu)(g) := \chi(g) \cdot \mu(g),$$

e all'elemento neutro $\underline{1} : G \to \mathbb{C}^*$ che manda ogni elemento in $1 \in \mathbb{C}^*$.

(ii) Mostrare che esiste un isomorfismo

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}_n)^\vee &\xrightarrow{\cong} \mu_n(\mathbb{C}), \\ \chi &\mapsto \chi(1), \end{aligned}$$

dove $\mu_n(\mathbb{C})$ è il gruppo delle radici n-esime dell'unità. Dedurre che esiste un isomorfismo (non canonico) $\mathbb{Z}_n^\vee \cong \mathbb{Z}_n$.

(iii) Mostrare che, dati due gruppi abeliani finiti G_1 e G_2, esiste un isomorfismo

$$(G_1 \oplus G_2)^\vee \cong G_1^\vee \oplus G_2^\vee.$$

(iv) Mostrare che per ogni gruppo abeliano finito G, vale che esiste un isomorfismo (non canonico) $G^\vee \cong G$.

[Suggerimento: usare i due punti precendenti e il teorema di struttura per i gruppi abeliani finiti.]

(v) Mostrare che esiste un isomorfismo canonico

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\cong} (G^\vee)^\vee, \\ a &\mapsto (\chi \mapsto \chi(a)). \end{aligned}$$

ESERCIZIO 21(NUOVO)

(i) Determinare i fattori invarianti e i divisori elementari di $A := \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{48}$.

(ii) Formalizzare una regola di come passare, per un gruppo abeliano finito, dai fattori invarianti ai divisori elementari.

ESERCIZIO 22(NUOVO)

(i) Sia A un gruppo abeliano finito con fattori invarianti $2 \leq n_1 | \leq \ldots | n_s$. Dimostrare che i fattori invarianti dei sottogruppi di A e dei quozienti di A sono tutte e sole le successioni $2 \leq m_1 | \leq \ldots | m_t$ tali che $t \leq s$ e $m_{i+s-t} | n_i$ per ogni $1 \leq i \leq t$.

(ii) Sia A un gruppo abeliano finito e, per ogni primo p e intero $n \geq 1$, denotiamo con $\gamma_A(p^n)$ il numero di volte che la potenza p^n appare tra i divisori elementari di A. Dimostrare che:

(a) Se B è un sottogruppo oppure un quoziente di A, allora $\gamma_B(p^m) \leq \sum_{k\geq m} \gamma_A(p^k)$ per ogni primo p e ogni $m \geq 1$.

(b) Viceversa, per ogni successione di numeri naturali $\{\mu(p^n)\}_{p,n}$, con p primo e $n \geq 1$, tale che $\mu(p^m) \leq \sum_{k\geq m} \gamma_A(p^k)$ per ogni $m \geq 1$, allora esiste un sottogruppo B di A e un quoziente $\bar{B}$ di A tale che $\mu(p^n) = \gamma_B(p^n)$.

ESERCIZIO 23(NUOVO)

Si consideri il gruppo abeliano $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ e sia p un numero primo.

(i) Dimostrare che

$$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(p) = \left\{ \left[\frac{a}{p^n}\right] : \ a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(ii) Dimostrare che i sottogruppi di $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(p)$ sono tutti e soli i sottogruppi

$$\langle \frac{1}{p^n} \rangle = \left\{ \left[\frac{a}{p^n}\right] : \ a \in \mathbb{Z} \right\},$$

al variare di $n\mathbb{N}$.