ESERCIZI SU IDEALI

ESERCIZIO 1(Ideali principali)

Sia R un anello, $a \in R$, e si consideri l'ideale (a) generato da a (chiamato *ideale principale*). Dimostrare che:

(i) L'ideale (a) consiste degli elementi della forma

$$r \cdot a + a \cdot s + na + \sum_{i=1}^{m} r_i \cdot a \cdot s_i,$$

al variare di $r, s, r_i, s_i \in R$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$.

(ii) Se R ha un'identità, allora (a) consiste degli elementi della forma

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \cdot a \cdot s_i,$$

al variare di $r_i, s_i \in R$, $m \in \mathbb{N}$.

(iii) Se a è nel centro di R, cioè se a commuta con tutti gli elementi di R, allora (a) consiste degli elementi della forma

$$r \cdot a + na,$$

al variare di $r \in R$ e $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) Se a è nel centro di R e R ha un'identità, allora (a) consiste degli elementi della forma

$$r \cdot a$$

al variare di $r \in R$.

ESERCIZIO 2

Sia R un anello commutativo.

(i) Dimostrare che l'insieme degli elementi nilpotenti di R formano un ideale (chiamato il *nilradicale* di R e denotato con $\operatorname{Rad}(R)$).

(ii) Dimostrare che $R/\operatorname{Rad}(R)$ non ha elementi nilpotenti non nulli.

(iii) Sia I un ideale di R. Dimostrare che l'insieme

$$\operatorname{Rad} I := \{r \in R \, : r^n \in I \;\text{ qualche } n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

è un ideale di R (chiamato il *radicale* di I).

ESERCIZIO 3

Sia R un anello.

(i) Sia $a \in R$. Dimostrare che

$$\operatorname{Ann}_L(a) := \{r \in R \, : r \cdot a = 0\}$$

è un ideale sinistro di R (chiamato l'annullatore sinistro di a) e che

$$\operatorname{Ann}_R(a) := \{r \in R \, : a \cdot r = 0\}$$

è un ideale destro di R (chiamato l'annullatore destro di a)

(ii) Sia I un ideale di R. Dimostrare che

$$[R : I] := \{r \in R \, : x \cdot r = 0 \text{ per ogni } x \in I\}$$

è un ideale di R.

ESERCIZIO 4
Sia $R = M_n(F)$ con F campo e $n \geq 1$. Dimostrare che il centro di $M_n(F)$ consiste dei multipli della matrice identità.

ESERCIZIO 5
Siano R un anello con identità $1 \neq 0$. Dimostrare che R è un corpo se e solo se R non ha ideali sinistri propri (risp. ideali destri propri).

ESERCIZIO 6
Sia S un anello con identità $1 \neq 0$ e sia $n \geq 2$.

(i) Dimostrare che ogni ideale J di $M_n(S)$ è della forma $J = M_n(I)$ con I ideale di S.
[Suggerimento: Dato un ideale I di $M_n(S)$, sia J l'insieme degli elementi di R che appaiono nell'entrata $(1,1)$ di qualche matrice di I. Dimostrare che J è un ideale di R. Sia $E_{r,s}$ la matrice di $M_n(S)$ che ha 1 nell'entrata (r,s) e 0 altrimenti. Dimostrare che per ogni matrice $A = (a_{ij})$, la matrice $E_{pq}AE_{rs}$ ha a_{qr} nell'entrata (p,s) e 0 altrove. Dedurre che $I = M_n(J)$.]

(ii) Dimostrare che per ogni ideale I di S, vale che $M_n(S)/M_n(I) \cong M_n(S/I)$.

ESERCIZIO 7
Sia D un corpo e $n \geq 2$. Mostrare che (0) è un ideale massimale (e dunque primo) di $M_n(D)$ ma che $M_n(D)$ non è un dominio (e dunque nemmeno un corpo).
[Suggerimento: per la prima asserzione, si utilizzi l'esercizio precedente.]

ESERCIZIO 8
Sia R un anello e I un ideale di R diverso da R. Dimostrare che I è un ideale primo di R se e solo se per ogni $r, s \in R$ tali che $(r) \cdot (s) \subseteq I$ vale che $(r) \subseteq I$ oppure $(s) \subseteq I$.

ESERCIZIO 9
Sia $f : R \to S$ un epimorfismo di anelli. Dimostrare che la biezione canonica tra gli ideali di R che contengono $\ker(f)$ e gli ideali di S rispetta le proprietà di essere primo o massimale.

ESERCIZIO 10
Sia R un anello. Una *congruenza* in R è una relazione di equivalenza $\equiv$ di R tale che $a \equiv a'$ e $b \equiv b'$ implicano che $a + b \equiv a' + b'$ e $ab \equiv a'b'$. Dimostrare che esiste una corrispondenza biunivoca tra ideali di R e congruenze di R ottenuta mandando un ideale I di R nella relazione di equivalenza $\equiv_I$ definita da

$$a \equiv_I b \Leftrightarrow a - b \in I.$$

ESERCIZIO 11 (Prodotto diretto di anelli)
Sia $\{R_i\}_{i \in I}$ una collezione non vuota di anelli. Il prodotto diretto $\prod_{i \in I} R_i$ dei gruppi $(R_i, +, 0)$, munito della moltiplicazione

$$(a_i) \cdot (b_i) := (a_i \cdot b_i)$$

è detto prodotto diretto di $\{R_i\}_{i \in I}$.

(i) Dimostrare che $\prod_{i \in I} R_i$ è commutativo se e solo se tutti gli anelli R_i sono commutativi, e che $\prod_{i \in I} R_i$ ha un'identità 1 se e solo se ciascun R_i ha un'identità $!_i$ e in tal caso $1 = (1_i)$.

(ii) Dimostrare che le proiezioni $\pi_k : \prod_{i \in I} R_i \to R_k$ canoniche soddisfano la seguente proprietà universale: dato un anello S e degli omomorfismi di anelli $\phi_k : S \to R_k$ per ogni $k \in I$, allora esiste ed è unico un omomorfismo di anelli $\Phi : S \to \prod_{i \in I} R_i$ tale che $\phi_k = \pi_k \circ \Phi$ per ogni $k \in I$.

ESERCIZIO 12 (Prodotto diretto interno di anelli)

Sia R un anello e siano $A_1, \dots A_n$ ideali di R tali che

(a) $A_1 + \dots + A_n = R$;
(b) $A_k \cap (A_1 + \dots + A_{k-1} + A_{k+1} + \dots + A_n) = \{0\}$ per ogni $1 \leq k \leq n$.

Dimostrare che la mappa

$$\Phi : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow R,$$
$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 + \dots + a_n$$

è un isomorfismo di anelli.

ESERCIZIO 13 (Teorema cinese dei resti con due fattori)

Sia R un anello e siano A_1, A_2 due ideali di R.

(i) Dimostrare che esiste un monomomorfismo
$$\theta : R/(A_1 \cap A_2) \longrightarrow R/A_1 \times R/A_2.$$
(ii) Dimostrare che se $A_1 + A_2 = R$ allora per ogni $a_1, a_2 \in R$ esiste $a \in R$ tale che $a \equiv a_k \mod I_k$, cioè $a - a_k \in I_k$, per $k = 1, 2$.
(iii) Dimostrare che se $A_1 + A_2 = R$ allora θ è un isomorfismo.

ESERCIZIO 14 (Idempotenti)

Sia R un anello con identità. Un *idempotente* di R è un elemento $e \in R$ tale che $e^2 = e$. Un idempotente e si dice centrale se e appartiene al centro di R. Una collezione di idempotenti $\{e_1, \dots, e_n\}$ di cardinalità n si dice ortogonale se $e_i e_j = 0$ per ogni $i \neq j$ e completa se $1 = e_1 + \dots + e_n$. Siano R, $R_1, \dots, R_n$ anelli con identità. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) $R \cong R_1 \times \dots \times R_n$;
(b) R contiene una collezione ortogonale completa di lunghezza n di idempotenti centrali $\{e_1, \dots, e_n\}$ tali che $(e_i) \cong R_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

[Suggerimento: Se vale (a) allora si definisca e_i come l'immagine di $(0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$ dove l'entrata 1 si trova all'i-esimo posto. Se vale (b), allora si mostri che R è il prodotto interno diretto degli ideali principali $A_i := (e_i)$.]