PRIMO APPELLO DI
GEOMETRIA 1 E COMPLIMENTI DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE
UNIVERSITÁ ROMA TRE, A.A. 2016/2017

Nome candidato: Numero di matricola:

Tipo di prova scelta:

- ☐ Esame completo
- ☐ Prima parte: Geometria 1
- ☐ Seconda parte: Complementi di Matematica
- ☐ Integrazione di crediti: ....

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente. Se si svogle il compito intero, bisogna consegnare il compito diviso in due parti (e dunque in fogli diversi).

ESERCIZI di GEOMETRIA 1

ESERCIZIO 1

Sia V uno spazio vettoriale.

(a) Dimostrare che, per ogni sottospazio vettoriale W di V, l'insieme

$$W^{\perp} := \{\underline{v} \in V \ : \ \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0, \ \text{per ogni } \ \in W\},$$

é un sottospazio vettoriale.

(b) Dimostrare che dati due sottospazi vettoriali U e W di V, l'insieme $U \cap W$ ún sottospazio vettoriale di V.

ESERCIZIO 2

É dato il sistema lineare $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}.$$

(a) Verficare direttamente che per $k = 0$ il sistema non ammette soluzioni.
(b) Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette soluzioni.
(c) Calcolare le soluzioni corrispondenti a tali valori di k.
(d) Sia S l'insieme delle soluzioni trovate al punto precedente. Dire se S è uno spazio vettoriale motivandone la risposta.

ESERCIZIO 3

È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

(a) Verificare direttamente che per $a = 1$ la matrice non é diagonalizzabile.
(b) Determinare per quali valori del parametro reale a, la matrice risulta diagonalizzabile.
(c) Calcolare, per quanto stabilito al punto precedente, una matrice C che permetta di diagonalizzare la matrice A.
(d) Determinare una matrice diagonale simile ad A.

ESERCIZIO 4

Si consider l'operatore T di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y+z \\ 2x-y-z \\ x+y \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare l'immagine $T(\underline{w})$ e la controimmagine $T^{-1}(\underline{w})$ del vettore $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Determinare una base per il sottospazio $\ker(T)$, nucleo di T, e una per $\mathrm{Im}(T)$, immagine di T.

(c) Verificare che T é un operatore diagonalizzabile.

(d) Determinare un'equazione cartesiana per $\mathrm{Im}(T)$.

ESERCIZI di COMPLEMENTI DI MATEMATICA

ESERCIZIO 5

Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{C}^3$:

$$q(X,Y,Z) = X^2 + 4XZ - Y^2 + Z^2.$$

(i) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a cui q sia diagonale. Scrivere la forma diagonale nella base ortonormale trovata. Dire qual'è il rango e la segnatura di q.

(ii) Ridurre q in forma canonica su $\mathbb{C}^3$.

ESERCIZIO 6

Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 1+t, \\ y = -1+t, \\ z = 1-2t, \end{cases} \text{ e } r_2 : \begin{cases} 2x+y-3z = 0, \\ y-z = 0. \end{cases}$$

(i) Stabilire se r_1 e r_2 sono incidenti, parallele o sghembe.

(ii) Trovare tutte le rette aventi come direzione $v = (1,-1,2)$ e incidenti sia a r_1 che a r_2.

(iii) Trovare tutti i piani contenenti r_1 e paralleli a r_2.

ESERCIZIO 7

(i) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 0.$$

(ii) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = -1. \end{cases}$$

ESERCIZIO 8

Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x,y) = |x-y|$$

nel dominio

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}.$$