Prova scritta intermedia di Geometria I modulo
Ingegneria Civile - …/07/2017

Esercizio 1. In $\mathbf{R}^4$ si considerino i tre vettori :

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e i suoi sottospazi $U = L_{\mathbf{R}}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ e V definito dal sistema con equazioni cartesiane:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \qquad 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 .$$

(i). Dimostrare che i tre vettori sono linearmente dipendenti.
(ii). Determinare la dimensione e una base del sottospazio U e del sottospazio V.
(iii). Determinare la dimensione e una base del sottospazio $U + V$ e del sottospazio $U \cap V$.
(iv). Determinare la dimensione e una base del sottospazio $(U + V)^{\perp}$.

Esercizio 2. Sia T l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$, è :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i). Determinare i sottospazi Ker(T) e Im(T) di $\mathbf{R}^3$.
(ii). Determinare la matrice B che rappresenta l'endomorfismo T rispetto alla seguente base di $\mathbf{R}^3$:

$$\left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(iii). Determinare gli autospazi dell'endomorfismo T.
(iv). Mostrare che T è diagonalizzabile e determinare una base rispetto alla quale T si rappresenta mediante una matrice diagonale.

Esercizio 3. Sia A una qualsiasi matrice quadrata reale a n righe ed n colonne. Dimostrare che i seguenti due sottoinsiemi dello spazio vettoriale $M_n(\mathbf{R})$ (spazio vettoriale delle matrici quadrate a n righe ed n colonne a elementi reali):

$$H_n = \{ X \in M_n(\mathbf{R}) : A \cdot X = X \cdot A \}$$

$$K_n = \{ Y \in M_n(\mathbf{R}) : A \cdot Y + Y \cdot A = \text{matrice nulla} \}$$

sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $M_n(\mathbf{R})$.

Esercizio 4. Sia M una matrice 2×2 che dopo l' eliminazione di Gauss abbia come pivots λ e μ . È vero che λ e μ sono gli autovalori di M ? Giustificare la risposta.