SOLUZIONI DELLA PARTE DI COMPLEMENTI DI MATEMATICA DEL PRIMO APPELLO PER IL CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE UNIVERSITÁ ROMA TRE, A.A. 2016/2017

ESERCIZIO 5

Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{C}^3$:

$$q(X, Y, Z) = X^2 + 4XZ - Y^2 + Z^2.$$

(i) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a cui q sia diagonale. Scrivere la forma diagonale nella base ortonormale trovata. Dire qual'è il rango e la segnatura di q.

(ii) Ridurre q in forma canonica su $\mathbb{C}^3$.

Soluzione:

Si veda l'esercizio 2(c) della Sezione 22 del libro *Geometria 1* di Sernesi.

ESERCIZIO 6

Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 + t, \\ z = 1 - 2t, \end{cases} \text{ e } r_2 : \begin{cases} 2x + y - 3z = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

(i) Stabilire se r_1 e r_2 sono incidenti, parallele o sghembe.

(ii) Trovare tutte le rette aventi come direzione $v = (1, -1, 2)$ e incidenti sia a r_1 che a r_2.

(iii) Trovare tutti i piani contenenti r_1 e paralleli a r_2.

Soluzione:

Parte (i): la giacitura di r_1 è il sottospazio generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, mentre la giacitura di r_2 è il sottospazio generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque r_1 e r_2 non sono parallele. Sostituendo le equazioni parametriche di r_1 nelle equazioni cartesiane di r_2, si vede che $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, dunque r_1 e r_2 non sono incidenti. Ne deduciamo che r_1 e r_2 sono sghembe.

Parte (ii): una retta s avente come direzione il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ si scrive nella forma

$$s : \begin{cases} x = a + t, \\ y = b - t, \\ z = c + 2t, \end{cases}$$

Inoltre, a meno di riparametrizzazione $t \mapsto t + t_0$ per un certo t_0, possiamo supporre che $c = 0$. Imponendo che $s \cap r_2 \neq \emptyset$ si ottiene la condizione $3a + 4b = 0$. Imponendo che $s \cap r_1 \neq \emptyset$ si ottiene che $2b + 1 = 0$. Dunque esiste un'unica retta che soddisfa le proprietà richieste e cioè:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t, \\ y = -\dfrac{1}{2} - t, \\ z = 2t, \end{cases}$$

Parte (iii): ogni piano π che contiene r_1 ed è parallelo a r_2 è parallelo sia a r_1 che a r_2; dunque la giacitura di π è la somma delle giaciture di r_1 e r_2 (poiché r_1 e r_2 non sono parallele), e cioè

$$V := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

L'equazione cartesiana per il piano V è:

$$V = \{x - y = 0\}.$$

Dunque le equazioni cartesiane per il piano π sono $\pi : \{x - y = a\}$. Un tale piano π conterrà r_1 se e solo se $a = 2$. Dunque esiste un unico piano che soddisfa le proprietà richieste e cioè: $\{x - y = 2\}$.

ESERCIZIO 7

(i) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 0.$$

(ii) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = -1. \end{cases}$$

Soluzione:

Parte (i): la soluzione generale è

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t).$$

Si veda l'Esempio 4 del Capitolo 1, Sezione 2 del libro *Esercizi di Analisi Matematica 2* di Salsa-Squellati.

Part (ii): imponendo le condizioni iniziali alla soluzione generale trovata in (i) si ottiene che $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. Dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = e^{-t} \cos 2t.$$

ESERCIZIO 8

Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x, y) = |x - y|$$

nel dominio

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}.$$

Soluzione: Si veda l'Esempio 1 del Capitolo 5, Sezione 1 del libro *Esercizi di Analisi Matematica 2* di Salsa-Squellati.