Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO A DEL CORSO GE110
10 GIUGNO 2019

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Si consideri l'operatore lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ definito da

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6z - 3w \\ x - 7z - 2w \\ -2z - w \\ 4z + 2w \end{pmatrix}.$$

(A) Dimostrare che il polinomio caratteristico di Φ è uguale a x^4 e calcolare il polinomio minimo di Φ.
(B) Si calcolino gli autovalori di Φ e, per ciascuno di essi, si determinino gli autospazi generalizzati corrispondenti.
(C) Si determini la forma canonica di Jordan di Φ.
(D) Per ciascun $k = 0, 1, 2, 3, 4$, determinare tutti vettori $v \in \mathbb{C}^4$ tale che $\mu_{\Phi,v}(x) = x^k$ (qualora esistano).
(E) Si determini una base di Jordan, cioè una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ tale che $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ si scrive in forma canonica di Jordan.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ -5 & 2 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Si consideri l'operatore lineare $\Psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Psi)$ è uguale ad A e l'operatore lineare $\Pi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Pi)$ è uguale ad A.

(A) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di Ψ e di Π.
(B) Si calcoli la decomposizione primaria di Ψ.
(C) Per ciascun autovalore di Π, si calcolino gli autospazi generalizzati.
(D) Si dica se Ψ e Π sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, trovare delle basi diagonalizzanti.
(E) Si calcolino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $\mu_{\Psi,v}(x) = x^2 + 1$ (qualora esistano) e tutti i vettori $w \in \mathbb{C}^4$ tali che $\mu_{\Pi,w}(x) = x^2 + 1$ (qualora esistano).

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_3 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_3 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_4 = 0, \end{cases}$$

e sia V_2 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ dato da

$$V_2 := \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(A) Determinare una base di $V_1 \cap V_2$.
(B) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e calcolare la sua dimensione.
(C) Usando l'identificazione canonica $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$, si calcoli $\mathrm{Ann}(V_1)$ in forma cartesiana e $\mathrm{Ann}(V_2)$ in forma parametrica.
(D) Determinare una base di $\mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2)$.
(E) Scrivere $\mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana e calcolare la sua dimensione.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare $\Theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^4)$ la cui matrice canonica è

$$M(\Theta) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(A) Calcolare $\mathrm{Ker}(\Theta)$ in forma parametrica e $\mathrm{Im}(\Theta)$ in forma cartesiana.
(B) Usando le identificazioni canoniche $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$ e $(\mathbb{Q}^3)^* \cong \mathbb{Q}^3$, si consideri l'applicazione duale $\Theta^* \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^3)$. Calcolare $\mathrm{Ker}(\Theta^*)$ in forma parametrica e $\mathrm{Im}(\Theta^*)$ in forma cartesiana.
(C) Trovare una base del dominio e una base del codominio rispetto alle quali Θ si scrive in forma canonica (rispetto alla relazione di equivalenza).
(D) Trovare una base del dominio e una base del codominio rispetto alle quali Θ^* si scrive in forma canonica (rispetto alla relazione di equivalenza).

ESERCIZIO 5 (8 punti) Siano V e W due F-spazi vettoriali di dimensioni finita.
(A) Siano $K \leq V$ e $I \leq W$ due sottospazi. Dimostrare che:
  (i) esiste un'applicazione lineare $\Phi : V \to W$ tale che $\ker(\Phi) = K$ se e solo se $\dim K \geq \dim V - \dim W$.
  (ii) esiste un'applicazione lineare $\Phi : V \to W$ tale che $\mathrm{Im}(\Phi) = I$ se e solo se $\dim I \leq \dim V$.
  (iii) esiste un'applicazione lineare $\Phi : V \to W$ tale che $\ker(\Phi) = K$ e $\mathrm{Im}(\Phi) = I$ se e solo se $\dim K + \dim I = \dim V$.
(B) Sia $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dimostrare che:
  (i) Φ è iniettiva se e solo se esiste $\Psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$ tale che $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_V$.
  (ii) Φ è suriettiva se e solo se esiste $\Psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$ tale che $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_W$.