Nome candidato:
Numero di matricola:

# APPELLO B DEL CORSO GE110
# 8 LUGLIO 2019

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

**ESERCIZIO 1** (8 punti)
Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Si consideri l'operatore lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ univocamente determinato da

$$\begin{cases} \Phi(e_1) = e_1 + e_4, \\ \Phi(e_2) = -e_1 + e_2 - 2e_4, \\ \Phi(e_3) = e_1 + e_4, \\ \Phi(e_4) = e_2 - e_3 - 2e_4. \end{cases}$$

(A) Si calcoli il polinomio caratteristico di $\Phi$ e si mostri che il polinomio minimo di $\Phi$ è $x^4$.
(B) Si calcolino gli autovalori di $\Phi$ e, per ciascuno di essi, si determinino gli autospazi generalizzati corrispondenti.
(C) Si determini la forma canonica di Jordan di $\Phi$.
(D) Per ciascun $k = 0, 1, 2, 3, 4$, determinare tutti vettori $v \in \mathbb{C}^4$ tale che $\mu_{\Phi,v}(x) = x^k$ (qualora esistano).
(E) Si determini una base di Jordan, cioè una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ tale che $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ si scrive in forma canonica di Jordan.

**ESERCIZIO 2** (8 punti)
Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 & 6 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Si consideri l'operatore lineare $\Psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Psi)$ è uguale ad $A$ e l'operatore lineare $\Pi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Pi)$ è uguale ad $A$.

(A) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di $\Psi$ e di $\Pi$.
(B) Si calcoli la decomposizione primaria di $\Psi$.
(C) Per ciascun autovalore di $\Pi$, si calcolino gli autospazi generalizzati.
(D) Si dica se $\Psi$ e $\Pi$ sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, trovare delle basi diagonalizzanti.
(E) Si calcolino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $\mu_{\Psi,v}(x) = x^2 + 1$ (qualora esistano) e tutti i vettori $w \in \mathbb{C}^4$ tali che $\mu_{\Pi,w}(x) = x^2$ (qualora esistano).

**ESERCIZIO 3** (8 punti)
Sia $V_1$ il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_3 - X_4 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_3 = 0, \end{cases}$$

e sia $V_2$ il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_3 - X_4 = 0, \end{cases}$$

(A) Determinare una base di $V_1$, di $V_2$ e di $V_1 \cap V_2$.
(B) Calcolare la dimensione di $V_1 + V_2$ usando la formula di Grassmann, e scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana.
(C) Dire se esiste un'applicazione lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^4)$ tale che $\ker \Phi = V_1$ e $\mathrm{Im}\, \Phi = V_2$, e in caso affermativo, si scriva esplicitamente una tale $\Phi$.
(D) Usando l'identificazione canonica $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$, si calcolino $\mathrm{Ann}(V_1)$ e $\mathrm{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana.
(E) Scrivere $\mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2)$ in forma parametrica e $\mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana.

**ESERCIZIO 4** (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare $\Theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^4)$ la cui matrice canonica è

$$M(\Theta) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(A) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(\Theta)$ e una base di $\mathrm{Im}(\Theta)$.
(B) Trovare una base del dominio e una base del codominio rispetto alle quali $\Theta$ si scrive in forma canonica (rispetto alla relazione di equivalenza).
(C) Usando le identificazioni canoniche $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$ e $(\mathbb{Q}^3)^* \cong \mathbb{Q}^3$, si consideri l'applicazione duale $\Theta^* \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^3)$. Calcolare $\mathrm{Ker}(\Theta^*)$ in forma parametrica e $\mathrm{Im}(\Theta^*)$ in forma cartesiana.
(D) Sia $V := \mathbb{Q}^3 / \mathrm{Ker}(\Theta)$ e $W := \mathrm{Im}(\Theta)$. Si consideri l'isomorfismo indotto da $\Theta$:

$$\overline{\Theta} : V \longrightarrow W,$$
$$x + \mathrm{Ker}(\Theta) \mapsto \Theta(x).$$

Trovate una base $\mathcal{B}$ di $V$ e una base $\mathcal{C}$ di $W$ e scrivere $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\overline{\Phi})$.
(E) Calcolare l'operatore inverso $(\overline{\Theta})^{-1}$ di $\overline{\Theta}$.

**ESERCIZIO 5** (8 punti)
Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ un operatore e consideriamo la sua decomposizione primaria $V = V_\Phi(p_1) \oplus \ldots \oplus V_\Phi(p_r)$. Dimostrare che $\Phi$ è ciclico se e solo se $\Phi_{|V_\Phi(p_i)}$ è ciclico per ogni $1 \leq i \leq r$.