Nome candidato:
Numero di matricola:

# PRIMA PROVA IN ITINERE DEL CORSO GE110
# 11 APRILE 2019

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

**ESERCIZIO 1** (15 punti)

Sia $V_1$ il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dall'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 + X_4 = 0, \\ X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 = 0, \\ X_1 - X_3 - X_4 = 0, \end{cases}$$

e $V_2$ il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ dato da

$$V_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(A) Scrivere $V_1$ in forma parametrica e determinare una sua base.
(B) Determinare una base di $V_2$ e scrivere $V_2$ in forma cartesiana.
(C) Scrivere $V_1 \cap V_2$ in forma parametrica e determinare una sua base.
(D) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e determinare una sua base.
(E) Trovare un sottospazio complementare di $V_1$, cioè un sottospazio $W$ tale che $\mathbb{Q}^4 = V_1 \oplus^{\text{int}} W$.

**ESERCIZIO 2** (7 punti)

Si considerino i seguenti due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$:

$$I := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset S := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(A) Dimostrare che $I$ è lineramente indipendente.
(B) Dimostrare che $S$ è generante.
(C) Determinare una base $B$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $I \subseteq B \subseteq S$.

**ESERCIZIO 3** (7 punti)

Si consideri il seguente endomorfismo lineare di $\mathbb{C}^3$:

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y - z \\ x + 2y + z \end{pmatrix}.$$

(A) Si determini la matrice associata a $\Phi$ rispetto alla basi canoniche del dominio e del codominio.
(B) Dimostrare che $\Phi$ è un isomorfismo.
(C) Calcolare l'inverso $\Phi^{-1}$ di $\Phi$.

**ESERCIZIO 4** (9 punti)

Sia $\mathbb{Q}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e $\mathbb{Q}^3$ con base canonica $\{f_1, f_2, f_3\}$. Si consideri l'omomorfismo lineare $\Psi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ univocamente determinato da:

$$\begin{cases} \Psi(e_1) = f_1 - f_2 - f_3, \\ \Psi(e_2) = f_1 - f_2 - 3f_3, \\ \Psi(e_3) = -f_1 + f_2 - f_3, \\ \Psi(e_4) = -f_1 + f_2 - 3f_3. \end{cases}$$

(A) Si determini un base del nucleo di $\Psi$, e si calcoli la nullità di $\Psi$.
(B) Si determini una base dell'immagine di $\Psi$, e si calcoli il rango di $\Psi$.
(C) Si determini un'applicazione lineare iniettiva $\Pi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^4$ tale che $\Psi \circ \Pi = 0$.

**ESERCIZIO 5** (6 punti)

Si consideri la seguenti matrice a coefficienti in $\mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(A) Si determini il rango di $A$.
(B) Si trovino della matrici invertibili $P$ e $Q$ tali che $P \cdot A \cdot Q$ è in forma canonica rispetto alla relazione di equivalenza.