Nome candidato:
Numero di matricola:

SECONDA PROVA IN ITINERE DEL CORSO GE110
3 GIUGNO 2019

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Si consideri l'operatore lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ definito da

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-3z-4w \\ -x-2y+4z+7w \\ x+y-3z-4w \\ -x-y+3z+4w \end{pmatrix}.$$

(A) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di Φ.
(B) Si calcolino gli autovalori di Φ e, per ciascuno di essi, si determinino gli autospazi generalizzati corrispondenti.
(C) Si calcoli il polinomio minimo $\mu_{\Phi,v}$ di Φ rispetto al vettore

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e si determini una base del sottospazio ciclico $\langle \Phi, v \rangle$.
(D) Si determini la forma canonica di Jordan di Φ.
(E) Si determini una base di Jordan, cioè una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ tale che $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ si scrive in forma canonica di Jordan.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri l'operatore lineare $\Psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ la cui matrice canonica è data da

$$M(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(A) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di Ψ.
(B) Si dica se Ψ è triangolarizzabile.
(C) Si calcoli la decomposizione primaria di Ψ.
(D) Si calcolino i divisori elementari di Ψ.
(E) Si dica se esiste un un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $\mu_{\Psi,v}(x) = x^2+1$, e in caso affermativo, si calcolino tutti i vettori con questa proprietà.

ESERCIZIO 3 (6 punti)
Si consideri l'operatore lineare $\Pi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ la cui matrice canonica è data da

$$M(\Pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(A) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di Π.

(B) Si calcolino gli autovalori di Φ e, per ciascuno di essi, si determinino gli autospazi generalizzati corrispondenti.
(C) Si dica se Π è diagonalizzabile e, in caso positivo, si calcoli una base diagonalizzante.

ESERCIZIO 4 (8 punti)

Si consideri la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ e la base canonica $\{f_1, f_2, f_3\}$ di $\mathbb{Q}^3$. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{Q}^4 &\longrightarrow \mathbb{Q}^3, \\ e_1 &\mapsto f_1 - f_2 + 2f_3, \\ e_2 &\mapsto -f_1 + f_2 + f_3, \\ e_3 &\mapsto 2f_1 - 2f_2 + f_3, \\ e_4 &\mapsto -3f_1 + 3f_2. \end{aligned}$$

Usando le identificazioni $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$ e $(\mathbb{Q}^3)^* \cong \mathbb{Q}^3$ (viste a lezione), si consideri l'applicazione duale $\Theta^* \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^4)$.

(A) Si calcoli $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}(\Theta))$ in forma parametrica.
(B) Si calcoli $\mathrm{Ann}(\mathrm{Im}(\Theta))$ in forma cartesiana.
(C) Si calcoli $\mathrm{Ker}(\Theta^*)$ in forma parametrica.
(D) Si calcoli $\mathrm{Im}(\Theta^*)$ in forma cartesiana.

ESERCIZIO 5 (8 punti)

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ un operatore ciclico. Dimostrare che Φ è indecomponibile se e solo se μ_Φ è una potenza di un polinomio irriducibile.

[Suggerimento: usare la decomposizione primaria e la struttura dei sottospazi Φ-invarianti per Φ ciclico.]