APPELLO A DEL CORSO GE110
10 GIUGNO 2019

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Si consideri l'operatore lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ definito da

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6z - 3w \\ x - 7z - 2w \\ -2z - w \\ 4z + 2w \end{pmatrix}.$$

(A) (1 punto) Dimostrare che il polinomio caratteristico di Φ è uguale a x^4 e calcolare il polinomio minimo di Φ.
(B) (1 punto) Si calcolino gli autovalori di Φ e, per ciascuno di essi, si determinino gli autospazi generalizzati corrispondenti.
(C) (2 punti) Si determini la forma canonica di Jordan di Φ.
(D) (2 punti) Per ciascun $k = 0, 1, 2, 3, 4$, determinare tutti vettori $v \in \mathbb{C}^4$ tale che $\mu_{\Phi,v}(x) = x^k$ (qualora esistano).
(E) (2 punti) Si determini una base di Jordan, cioè una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ tale che $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ si scrive in forma canonica di Jordan.

Soluzione:

(A) La matrice canonica associata a Φ è data da

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & -3 \\ 1 & 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Usando che $M(\Phi)$ è una matrice diagonale a blocchi, il polinomio caratteristico di Φ è dato da

$$\chi_\Phi(x) = \det \begin{pmatrix} x & 0 & 6 & 3 \\ -1 & x & 7 & 2 \\ 0 & 0 & x+2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & x-2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & 0 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} x+2 & 1 \\ -4 & x-2 \end{pmatrix} =$$

$$= x^2 \cdot [(x+2)(x-2) + 4] = x^2 \cdot x^2 = x^4.$$

Per calcolare il polinomio minimo di Φ, ricordiamo che $\mu_\Phi | \chi_\Phi$ e dunque avremo che $\mu_\Phi(x) = x^k$ con $k = 1, 2, 3$ o 4. Siccome $M(\Phi) \neq 0$ e $M(\Phi)^2 = 0$, deduciamo che $\mu_\Phi(x) = x^2$.

(B) Gli autovalori di Φ sono le radici del polinomio caratteristico di Φ. Siccome $\chi_\Phi = x^4$, abbiamo che 0 è l'unico autovalore di Φ.

Siccome la molteplicità di 0 come radice di $\mu_\Phi(x) = x^2$ è due, allora sappiamo che avremo la seguente catena di autospazi generalizzati

$$\{0\} \subsetneq \mathcal{E}_0^1(\Phi) = \mathcal{E}_0(\Phi) \subsetneq \mathcal{E}_0^2(\Phi) = \mathcal{E}_0^\infty(\Phi) = \mathbb{C}^4.$$

Usando che $\mathcal{E}_0(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{Sol}_{M(\Phi)}$ e risolvendo il sistemi lineare omogeneo, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*):

$$\mathcal{E}_0(\Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(C) Siccome 0 è l'unico autovalore di Φ sappiamo dalla teoria che la forma canonica di Jordan di Φ sarà della forma $J_{\underline{m}}(0)$ per una certa partizione $\underline{m} = (m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_r \geq 1)$. Inoltre, dalla teoria sappiamo che:
- $\mathrm{molt}_0(\chi_\Phi) = 4 \Rightarrow |\underline{m}| = 4$;
- $\mathrm{molt}_0(\mu_\Phi) = 2 \Rightarrow m_1 = 2$.

Dunque ci sono due possibilità per la partizione $\underline{m}$ e cioè $\underline{m} = (2,2)$ o $(2,1,1)$. Siccome la lunghezza della partizione è uguale alla dimensione dell'autospazio relativo a 0 e tale dimensione è 2 come calcolato nel punto precedente, ne deduciamo che la partizione in questione è $\underline{m} = (2,2)$.

(D) Dalla teoria sappiamo che $\mu_{\Phi,v} | \mu_\Phi$. Siccome $\mu_\Phi(x) = x^2$ come calcolato in (A), allora non esistono vettori $v \in \mathbb{C}^4$ tale che $\mu_{\Phi,v}(x) = x^3$ o x^4. Inoltre dalla definizione di polinomio minimo di v rispetto a Φ segue che

$$\begin{cases} \mu_{\Phi,v}(x) = 1 \Leftrightarrow v = 0, \\ \mu_{\Phi,v}(x) | x \Leftrightarrow v \in \ker(\Phi) = \mathcal{E}_0(\Phi). \end{cases}$$

Dunque deduciamo che

$$\begin{cases} \mu_{\Phi,v}(x) = 1 \Leftrightarrow v = 0, \\ \mu_{\Phi,v}(x) = x \Leftrightarrow v \in \mathcal{E}_0(\Phi) \setminus \{0\}, \\ \mu_{\Phi,v}(x) = x^2 \Leftrightarrow v \in \mathbb{C}^4 \setminus \mathcal{E}_0(\Phi). \end{cases}$$

(E) Affinché una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ sia tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = J_{2,2}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si deve avere necessariamente che $\mathcal{B} = \{w_1, \Phi(w_1), w_2, \Phi(w_2)\}$ con w_1 e w_2 tale che

$$\mathcal{E}_0(\Phi) \oplus^{\mathrm{int}} \langle w_1 \rangle \oplus^{\mathrm{int}} \langle w_2 \rangle = \mathbb{C}^4.$$

Usando l'espressione per $\mathcal{E}_0(\Phi)$ trovata in (B), è facile vedere (*qua andavano inseriti i conti*) che possiamo scegliere

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Usando che

$$\Phi(w_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi(w_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

deduciamo che una base di Jordan è data da

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ -5 & 2 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Si consideri l'operatore lineare $\Psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Psi)$ è uguale ad A e l'operatore lineare $\Pi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Pi)$ è uguale ad A.

(A) (1,5 punti) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di Ψ e di Π.
(B) (1,5 punti) Si calcoli la decomposizione primaria di Ψ.
(C) (1,5 punti) Per ciascun autovalore di Π, si calcolino gli autospazi generalizzati.
(D) (1,5 punti) Si dica se Ψ e Π sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, trovare delle basi diagonalizzanti.
(E) (2 punti) Si calcolino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $\mu_{\Psi,v}(x) = x^2+1$ (qualora esistano) e tutti i vettori $w \in \mathbb{C}^4$ tali che $\mu_{\Pi,w}(x) = x^2 + 1$ (qualora esistano).

Soluzione:

(A) I polinomi caratteristici di Ψ e di Π coincidono e sono uguali al polinomio caratteristico della matrice A. Essendo A una matrice diagonale a blocchi, calcoliamo

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x+2 & -1 & -3 & 1 \\ 5 & x-2 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 2 & x+1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+2 & -1 \\ 5 & x-2 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} x & 0 \\ 2 & x+1 \end{pmatrix} =$$

$$= [(x+2)(x-2)+5]\, x(x+1) = (x^2+1)x(x+1).$$

La decomposizione del polinomio $\chi_A(x)$ in irriducibili è data da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} (x^2+1)x(x+1) & \text{in } \mathbb{R}[x], \\ (x+i)(x-i)x(x+1) & \text{in } \mathbb{C}[x]. \end{cases}$$

In entrambi i casi, tutti i fattori irriducibili di χ_A appaiono con molteplicità uguale a 1. Siccome il polimonio minimo divide il polinomio caratteristico e ha gli stessi suo fattori irriducibili, ne deduciamo che

$$\mu_\Psi(x) = \chi_\Psi(x) = (x^2+1)x(x+1) \quad \text{e} \quad \mu_\Pi(x) = \chi_\Pi(x) = (x+i)(x-i)x(x+1).$$

(B) La decomposizione primaria di Ψ è data da

$$\mathbb{R}^4 = V_\Psi(x^2+1) \oplus^{\text{int}} V_\Psi(x+1) \oplus^{\text{int}} V_\Psi(x) = \ker(\Psi^2 + \mathrm{Id}) \oplus^{\text{int}} \mathrm{Ker}(\Psi + \mathrm{Id}) \oplus^{\text{int}} \mathrm{Ker}(\Psi).$$

Risolvendo gli opportuni sistemi lineari omogenei, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\ker(\Psi^2 + \mathrm{Id}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\ker(\Psi + \mathrm{Id}) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\ker(\Psi) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(C) Gli autovalori di Π sono le radici del polinomio caratteristico e dunque sono $i, -i, -1, 0$. Ciascuno di essi ha molteplicità algebrica 1, e dunque molteplicità geometrica e indice uguali a 1. Ciò implica che, per ciascun autovalore, gli autospazi generalizzati di indice maggiore di uno coincidiono con l'autospazio (di indice uno) il quale ha dimensione uguale a uno. Gli autospazi relativi a -1 e 0 sono generati dallo stesso vettore che genera $V_\Psi(x+1)$ e $V_\Psi(x)$ e dunque

$$\mathcal{E}_{-1}(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_0(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Risolvendo gli opportuni sistemi lineari omogenei, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\mathcal{E}_i(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_{-i}(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(D) L'operatore Ψ non è diagonalizzabile perché il suo polinomio caratteristico (o equivalentemente quello minimo) ha un fattore irriducibile non lineare, e cioè x^2+1.

L'operatore Π è invece diagonalizzabile perché il suo polinomio minimo $\mu_\Pi(x) = (x+i)(x-i)(x+1)x$ è prodotto di fattori lineari distinti. Un base diagonalizzante si ottiene mettendo insieme delle basi per i suoi autospazi, e dunque una tale base è data da

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(E) Dalla teoria sappiamo che per un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ vale che

$$\mu_{\Psi,v}(x) | x^2+1 \Leftrightarrow (\Psi^2 + \mathrm{Id})(v) = 0 \Leftrightarrow v \in V_\Psi(x^2+1).$$

Siccome l'unico divisore proprio di x^2+1 in $\mathbb{R}[x]$ è 1 e $\mu_{\Psi,v}(x) = 1$ se e solo se $v = 0$, ne deduciamo che

$$\mu_{\Psi,v}(x) = x^2+1 \Leftrightarrow v \in V_\Psi(x^2+1) \setminus \{0\}.$$

Dalla decomposizione in autospazi $\mathbb{C}^4 = \mathcal{E}_i(\Pi) \oplus^{\text{int}} \mathcal{E}_{-i}(\Pi) \oplus^{\text{int}} \mathcal{E}_{-1}(\Pi) \oplus^{\text{int}} \mathcal{E}_0(\Pi)$, deduciamo che per un vettore $w \in \mathbb{C}^4$ abbiamo che

$$\begin{cases} \mu_{\Pi,w}(x)|x^2+1 \Leftrightarrow ((\Pi + i\,\mathrm{Id}) \circ (\Pi - i\,\mathrm{Id}))(w) = (\Pi^2 + \mathrm{Id})(w) = 0 \Leftrightarrow v \in \mathcal{E}_i(\Pi) \oplus^{\text{int}} \mathcal{E}_{-i}(\Pi), \\ \mu_{\Pi,w}(x)|x+i \Leftrightarrow (\Pi + i\,\mathrm{Id})(w) = 0 \Leftrightarrow w \in \mathcal{E}_{-i}(\Pi), \\ \mu_{\Pi,w}(x)|x-i \Leftrightarrow (\Pi - i\,\mathrm{Id})(w) = 0 \Leftrightarrow w \in \mathcal{E}_i(\Pi). \end{cases}$$

Da questo deduciamo che

$$\mu_{\Pi,w}(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow w \in \mathcal{E}_i(\Pi) \oplus^{\text{int}} \mathcal{E}_{-i}(\Pi) \setminus \{\mathcal{E}_i(\Pi) \cup \mathcal{E}_{-i}(\Pi)\}.$$

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_3 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_3 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_4 = 0, \end{cases}$$

e sia V_2 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ dato da

$$V_2 := \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(A) (1,5 punti) Determinare una base di $V_1 \cap V_2$.
(B) (1,5 punti) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e calcolare la sua dimensione.
(C) (2 punti) Usando l'identificazione canonica $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$, si calcoli $\mathrm{Ann}(V_1)$ in forma cartesiana e $\mathrm{Ann}(V_2)$ in forma parametrica.
(D) (1,5 punti) Determinare una base di $\mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2)$.
(E) (1,5 punti) Scrivere $\mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana e calcolare la sua dimensione.

Soluzione:
Notiamo che V_1 è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} X_3 = 0, \\ X_1 - X_4 = 0, \end{cases}$$

e dunque una sua base è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

D'altra parte i primi due vettori dello span che dà V_2 sono linearmente indipendenti (in quanto non nulli e non proporzionali), mentre il terzo vettore è la somma dei primi due. Dunque una base di V_2 è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Un'equazione della forma $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0$ si annulla sulla base di V_2 se e solo se

$$\begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_4 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema (*qua andavano inseriti i conti*), si trova che una base dello spazio delle soluzioni è $(1, 0, -5, -1)$ e $(0, 1, -5, -2)$. Dunque delle equazioni cartesiane per V_2 sono

$$\begin{cases} X_1 - 5X_3 - X_4 = 0, \\ X_2 - 5X_3 - 2X_4 = 0. \end{cases}$$

(A) Una forma parametrica per $V_1 \cap V_2$ si ottiene mettendo insieme una forma parametrica di V_1 e una di V_2; dunque, $V_1 \cap V_2$ è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} X_3 = 0, \\ X_1 - X_4 = 0, \\ X_1 - 5X_3 - X_4 = 0, \\ X_2 - 5X_3 - 2X_4 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene che

$$V_1 \cap V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(B) Una forma parametrica per $V_1 + V_2$ si ottiene mettendo insieme una forma parametrica di V_1 e una di V_2; dunque abbiamo che

$$V_1 + V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Si vede facilmente che il primo, secondo e quarto vettore del precendente span sono linearmente indipendenti, mentre il terzo vettore è nello span dei primi due. Dunque $V_1 + V_2$ ha dimensione 3. Siccome si verifica facilmente che l'equazione $X_1 - 5X_3 - X_4 = 0$ si annulla sui generatori di $V_1 + V_2$, deduciamo che una forma cartesiana per $V_1 + V_2$ è data da

$$\{\, X_1 - 5X_3 - X_4 = 0.$$

(C) Usando le formule

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Sol}_A) = \mathrm{Span}_{A^t} \quad \text{e} \quad \mathrm{Ann}(\mathrm{Span}_A) = \mathrm{Sol}_{A^t}, \tag{0.2}$$

e partendo dalla forma parametrica di V_1 e dalla forma cartesiana di V_2 sopra ottenute, deduciamo che una forma cartesiana di $\mathrm{Ann}(V_1)$ è data da

$$\begin{cases} X_2 = 0 \\ X_1 + X_4 = 0, \end{cases}$$

mentre una forma cartesiana di $\mathrm{Ann}(V_2)$ è data da

$$\mathrm{Ann}(V_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(D) Sappiamo dalla teoria che $\mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2) = \mathrm{Ann}(V_1 + V_2)$. Dunque usando la forma cartesiana di $V_1 + V_2$ ottenuta nel punto (B) e le formule (0.2), otteniamo che

$$\mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dunque una base di $\mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2)$ è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(E) Dalla teoria sappiamo che $\mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2) = \mathrm{Ann}(V_1 \cap V_2)$ e $\dim \mathrm{Ann}(V_1 \cap V_2) = \mathrm{codim}(V_1 \cap V_2)$. Siccome $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ come calcolato nel punto (A), abbiamo che

$$\dim(\mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2)) = 3.$$

Inoltre, dalle formule (0.2) e dall'equazione parametrica di $V_1 \cap V_2$ trovata in (A), deduciamo che una forma cartesiana di $\mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2)$ è data da

$$\{ X_1 + 2X_2 + X_4 = 0.$$

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare $\Theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^4)$ la cui matrice canonica è

$$M(\Theta) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(A) (2 punti) Calcolare $\mathrm{Ker}(\Theta)$ in forma parametrica e $\mathrm{Im}(\Theta)$ in forma cartesiana.
(B) (2 punti) Usando le identificazioni canoniche $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$ e $(\mathbb{Q}^3)^* \cong \mathbb{Q}^3$, si consideri l'applicazione duale $\Theta^* \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^3)$. Calcolare $\mathrm{Ker}(\Theta^*)$ in forma parametrica e $\mathrm{Im}(\Theta^*)$ in forma cartesiana.
(C) (2 punti) Trovare una base del dominio e una base del codominio rispetto alle quali Θ si scrive in forma canonica (rispetto alla relazione di equivalenza).
(D) (2 punti) Trovare una base del dominio e una base del codominio rispetto alle quali Θ^* si scrive in forma canonica (rispetto alla relazione di equivalenza).

Soluzione:

(A) Il nucleo di Θ è dato da $\mathrm{Sol}_{M(\Theta)}$. Risolvendo il sistema (*qua andavano inseriti i conti*), si trova che

$$\ker(\Theta) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per il teorema di rango-nullità applicato a Θ, deduciamo che l'immagine di Θ ha dimensione uguale a

$$\dim \mathrm{Im}(\Theta) = \dim \mathbb{Q}^3 - \dim \mathrm{Ker}(\Theta) = 3 - 1 = 2.$$

Siccome le prime due colonne di $M(\Theta)$ non sono proporzionali tra di loro, abbiamo che

$$\mathrm{Im}(\Theta) = \mathrm{Span}_{M(\Theta)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Una forma cartesiana di $\mathrm{Im}(\Theta)$ consisterà di due equazioni lineari linearmente indipendenti che sono soddisfatte dai due vettori che generano $\mathrm{Im}(\Theta)$. Da un'ispezione diretta, si vede che questi due vettori soddisfano il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0, \\ X_3 + X_4 = 0, \end{cases}$$

che quindi è una forma cartesiana di $\mathrm{Im}(\Theta)$.

(B) Dalla teoria e da quanto calcolato in (A), sappiamo che

$$\ker(\Theta^*) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Im}(\Theta)) = \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Sol}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}\right) = \mathrm{Span}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Similmente, abbiamo che

$$\mathrm{Im}(\Theta^*) = \mathrm{Ann}(\ker(\Theta)) = \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Span}_{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}\right) = \mathrm{Sol}_{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \ : \ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

(C) Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{Q}^3$ e $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ la base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

Consideriamo la base $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\ker(\Theta)$ trovata in (A) ed estendiamola ad una base di $\mathbb{Q}^3$ aggiungendo $\{e_1, e_2\}$. Ora calcoliamo

$$\Theta(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta(e_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ed estendiamo questi due vettori ad una base di $\mathbb{Q}^4$ aggiungendo f_1 e f_3. Dunque, se consideriamo le due basi ordinate di $\mathbb{Q}^3$ e $\mathbb{Q}^4$

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

abbiamo che

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\Theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che è la forma canonica richiesta.

(D) Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{Q}^3$ e $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ la base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

Consideriamo la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\ker(\Theta^*)$ trovata in (B) ed estendiamola ad una base di $\mathbb{Q}^4$ aggiungendo $\{f_1, f_3\}$. Ora calcoliamo

$$\Theta^*(f_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta^*(f_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ed estendiamo questi due vettori ad una base di $\mathbb{Q}^3$ aggiungendo e_1. Dunque, se consideriamo le due basi ordinate di $\mathbb{Q}^4$ e $\mathbb{Q}^3$

$$\widetilde{\mathcal{C}} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathcal{B}} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

abbiamo che

$$M_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{C}}}(\Theta^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che è la forma canonica richiesta.

ESERCIZIO 5 (8 punti) Siano V e W due F-spazi vettoriali di dimensioni finita.

(A) Siano $K \leq V$ e $I \leq W$ due sottospazi. Dimostrare che:
- (i) esiste un'applicazione lineare $\Phi : V \to W$ tale che $\ker(\Phi) = K$ se e solo se $\dim K \geq \dim V - \dim W$.
- (ii) esiste un'applicazione lineare $\Phi : V \to W$ tale che $\mathrm{Im}(\Phi) = I$ se e solo se $\dim I \leq \dim V$.
- (iii) esiste un'applicazione lineare $\Phi : V \to W$ tale che $\ker(\Phi) = K$ e $\mathrm{Im}(\Phi) = I$ se e solo se $\dim K + \dim I = \dim V$.

(B) Sia $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dimostrare che:
- (i) Φ è iniettiva se e solo se esiste $\Psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$ tale che $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_V$.
- (ii) Φ è suriettiva se e solo se esiste $\Psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$ tale che $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_W$.

Soluzione:

(A) Tutte le implicazioni *solo se* seguono dal teorema di rango-nullità

$$\dim \ker(\Phi) + \dim \mathrm{Im}(\Phi) = \dim V,$$

insieme al fatto che $\dim \mathrm{Im}(\Phi) \leq \dim W$.

Dimostriamo ora le implicazioni *se* distinguendo i vari casi. Poniamo $n := \dim V$, $m := \dim W$, $r := \dim K$ e $s := \dim I$. Scegliamo una base $\{b_1, \ldots, b_r\}$ di K ed estendiamola ad una base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ di V. Scegliamo una base $\{c_1, \ldots c_s\}$ di I ed estendiamola ad una base $\{c_1, \ldots c_m\}$ di W.

(i) Usando l'ipotesi che $\dim(W) = m \geq n - r = \dim(V) - \dim(K)$, definiamo $\Phi : V \to W$ come l'unica applicazione lineare tale che:

$$\Phi(b_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \leq i \leq r, \\ c_{i-r} & \text{se } 1 + r \leq i \leq n. \end{cases}$$

Segue subito che $\ker(\Phi) = K$.

(ii) Usando l'ipotesi che $\dim(I) = s \leq n = \dim(V)$, definiamo $\Phi : V \to W$ come l'unica applicazione lineare tale che:

$$\Phi(b_i) = \begin{cases} c_i & \text{se } 1 \leq i \leq s, \\ 0 & \text{se } 1 + s \leq i \leq n. \end{cases}$$

Segue subito che $\mathrm{Im}(\Phi) = I$.

(iii) Usando l'ipotesi che $\dim(I) = s = n - r = \dim(V) - \dim(K)$, definiamo $\Phi : V \to W$ come l'unica applicazione lineare tale che:

$$\Phi(b_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \leq i \leq r, \\ c_{i-r} & \text{se } 1 + r \leq i \leq n. \end{cases}$$

Segue subito che $\ker(\Phi) = K$ e $\mathrm{Im}(\Phi) = I$.

(B) Le implicazioni *solo se* sono ovvie e seguono

(i) $\Leftarrow$: Se $\Phi(v) = 0$ allora

$$v = \mathrm{id}_V(v) = \Psi(\Phi(v)) = 0.$$

$\Rightarrow$: Sia $\{b_1, \ldots, b_n\}$ una base di V. Siccome Φ è iniettiva, allora $\{c_1 := \Phi(b_1), \ldots, c_n := \Phi(b_n)\}$ sono linearmente indipendenti in W. Estendiamo ad una base $\{c = 1 = \Phi(b_1), \ldots, c_n = \Phi(b_n), c_{n+1}, \ldots c_m\}$ di W. Ora definiamo $\Psi : W \to V$ come l'unica applicazione lineare tale che

$$\Psi(c_i) = \begin{cases} b_i & \text{se } 1 \leq i \leq n, \\ 0 & \text{se } n + 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Allora la composizione $\Psi \circ \Phi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ è tale che $(\Psi \circ \Phi_(b_i) = b_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Siccome $\{b_1, \ldots, b_n\}$ è una base di V, questo implica che $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_V$.

(ii) $\Leftarrow$: Per ogni $w \in W$, vale che

$$w = \mathrm{id}_W(w) = \Phi(\Psi(w)) \in \mathrm{Im}(\Phi).$$

$\Rightarrow$: Sia $\{c_1, \ldots, c_m\}$ una base di W. Siccome Φ è suriettiva, allora esistono degli elementi $\{b_1, \ldots, b_m\}$ di V tale che $\Phi(b_i) = c_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Ora definiamo $\Psi : W \to V$ come l'unica applicazione lineare tale che

$$\Psi(c_i) = b_i \text{ per ogni } 1 \leq i \leq m.$$

Allora la composizione $\Phi \circ \Psi \in \mathrm{Hom}(W, W)$ è tale che $(\Phi \circ \Psi)(c_i) = c_i$ per ogni $1 \leq i \leq m$. Siccome $\{c_1, \ldots, c_m\}$ è una base di W, questo implica che $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_W$.