

SOLUZIONI DELL'APPELLO B DEL CORSO GE110
8 LUGLIO 2019

ESERCIZIO 1 (8 punti)

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Si consideri l'operatore lineare $\Phi \in \text{End}(\mathbb{C}^4)$ univocamente determinato da

$$\begin{cases} \Phi(e_1) = e_1 + e_4, \\ \Phi(e_2) = -e_1 + e_2 - 2e_4, \\ \Phi(e_3) = e_1 + e_4, \\ \Phi(e_4) = e_2 - e_3 - 2e_4. \end{cases}$$

- (A) (1,5 punti) Si calcoli il polinomio caratteristico di Φ e si mostri che il polinomio minimo di Φ è x^4 .
- (B) (1,5 punti) Si calcolino gli autovalori di Φ e, per ciascuno di essi, si determinino gli autospazi generalizzati corrispondenti.
- (C) (1 punto) Si determini la forma canonica di Jordan di Φ .
- (D) (2 punti) Per ciascun $k = 0, 1, 2, 3, 4$, determinare tutti vettori $v \in \mathbb{C}^4$ tale che $\mu_{\Phi, v}(x) = x^k$ (qualora esistano).
- (E) (2 punti) Si determini una base di Jordan, cioè una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ tale che $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ si scrive in forma canonica di Jordan.

Soluzione:

- (A) La matrice canonica di Φ è data da

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di Φ è dato da

$$\chi_{\Phi}(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ -1 & 2 & -1 & x+2 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il determinante della matrice di sopra, effettuiamo le seguenti operazioni elementari sulle righe e colonne

$$\begin{pmatrix} x-1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ -1 & 2 & -1 & x+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 - xC_4} \begin{pmatrix} x-1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -x^2 - 2x - 1 & x+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + (x-1)R_4} \begin{pmatrix} 0 & 2x-1 & (-x^2 - x + 1)x & (x-1)(x_2) \\ 0 & x-1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -x^2 - 2x - 1 & x+2 \end{pmatrix}$$

Le operazioni elementari effettuate con cambiano il determinante. Facendo lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna e poi la terza riga, otteniamo che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2x-1 & (-x^2-x+1)x & (x-1)(x_2) \\ 0 & x-1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -x^2-2x-1 & x+2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2x-1 & (-x^2-x+1)x \\ x-1 & x \end{pmatrix} =$$

$$= (2x-1)x - (x-1)(-x^2-x+1)x = x^4.$$

Il polinomio minimo di Φ (o equivalentemente quello di $M(\Phi)$) è un divisore del polinomio caratteristico χ_Φ e ha i suoi stessi fattori irriducibili; dunque sarà della forma $\mu_\Phi = x^k$ con $k = 1, 2, 3, 4$. Per determinarlo basta calcolare le potenze della matrice $M(\Phi)$:

$$M(\Phi)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$M(\Phi)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

Dunque necessariamente deve essere $\mu_\Phi(x) = x^4$.

- (B) Gli autovalori di Φ sono le radici del polinomio caratteristico di Φ . Siccome $\chi_\Phi = x^4$, abbiamo che 0 è l'unico autovalore di Φ .

Siccome la molteplicità di 0 come radice di $\mu_\Phi(x) = x^4$ è quattro, allora sappiamo dalla teoria che avremo la seguente catena di autospazi generalizzati

$$\{0\} \subsetneq \mathcal{E}_0^1(\Phi) = \mathcal{E}_0(\Phi) \subseteq \mathcal{E}_0^2(\Phi) \subseteq \mathcal{E}_0^3(\Phi) \subsetneq \mathcal{E}_0^4(\Phi) = \mathcal{E}_0^\infty(\Phi) = \mathbb{C}^4.$$

Usando che $\mathcal{E}_0^i(\Phi) = \text{Ker}(\Phi^i) = \text{Sol}_{M(\Phi)^i}$ per ogni $i = 1, 2, 3$, e risolvendo i sistemi lineari omogenei, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*):

$$\mathcal{E}_0^1(\Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathcal{E}_0^2(\Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathcal{E}_0^3(\Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- (C) Siccome 0 è l'unico autovalore di Φ sappiamo dalla teoria che la forma canonica di Jordan di Φ sarà della forma $J_{\underline{m}}(0)$ per una certa partizione $\underline{m} = (m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r \geq 1)$ tale $|\underline{m}| = \dim \mathbb{C}^4 = 4$. Inoltre dalla teoria sappiamo che m_1 è uguale alla molteplicità di 0 in $\mu_\Phi(x)$, che è uguale a 4 per il punto (A). Dunque ne deduciamo che la partizione in questione è $\underline{m} = (4)$.

- (D) Dalla definizione di polinomio minimo di v rispetto a Φ segue che per ogni $i = 0, 1, 2, 3, 4$ abbiamo

$$\{ \mu_{\Phi, v}(x) | x^i \Leftrightarrow v \in \ker(\Phi^i) = \mathcal{E}_0^i(\Phi),$$

dove abbiamo posto $\mathcal{E}_0^0(\Phi) = \{0\}$ per comodità. Dunque deduciamo che per ogni $i = 1, 2, 3, 4$ abbiamo

$$\begin{cases} \mu_{\Phi, v}(x) = 1 \Leftrightarrow v = 0, \\ \mu_{\Phi, v}(x) = x^i \Leftrightarrow v \in \mathcal{E}_0^i(\Phi) \setminus \mathcal{E}_0^{i-1}(\Phi). \end{cases}$$

- (E) Affinché una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ sia tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = J_4(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

è necessario e sufficiente che $\mathcal{B} = \{w, \Phi(w), \Phi^2(w), \Phi^3(w)\}$ con $w \notin \mathcal{E}_0^3(\Phi)$. Se scegliamo

$$w := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora deduciamo che una base di Jordan è data da

$$\mathcal{B} := \left\{ w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi^2(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \Phi^3(w) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO 2 (8 punti)

Si consideri la seguente matrice

$$(0.1) \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 & 6 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si consideri l'operatore lineare $\Psi \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Psi)$ è uguale ad A e l'operatore lineare $\Pi \in \text{End}(\mathbb{C}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Pi)$ è uguale ad A .

- (A) (2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di Ψ e di Π .
- (B) (1,5 punti) Si calcoli la decomposizione primaria di Ψ .
- (C) (1,5 punti) Per ciascun autovalore di Π , si calcolino gli autospazi generalizzati.
- (D) (1 punto) Si dica se Ψ e Π sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, trovare delle basi diagonalizzanti.
- (E) (2 punti) Si calcolino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $\mu_{\Psi, v}(x) = x^2 + 1$ (qualora esistano) e tutti i vettori $w \in \mathbb{C}^4$ tali che $\mu_{\Pi, w}(x) = x^2$ (qualora esistano).

Soluzione:

- (A) I polinomi caratteristici di Ψ e di Π coincidono e sono uguali al polinomio caratteristico della matrice A . Essendo A una matrice diagonale a blocchi, calcoliamo

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x+3 & -5 & 3 & -6 \\ 2 & x-3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+3 & -5 \\ 2 & x-3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \\ &= [(x+3)(x-3) + 10] x^2 = (x^2 + 1)x^2.\end{aligned}$$

La decomposizione del polinomio $\chi_A(x)$ in irriducibili è data da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)x^2 & \text{in } \mathbb{R}[x], \\ (x+i)(x-i)x^2 & \text{in } \mathbb{C}[x]. \end{cases}$$

Siccome il polinomio minimo di Ψ divide il suo polinomio caratteristico e ha gli stessi suoi fattori irriducibili, ne deduciamo che ci sono due possibilità per il polinomio minimo

$$\mu_\Psi(x) = \chi_\Psi(x) = (x^2 + 1)x^2 \quad \text{oppure} \quad \mu_\Psi(x) = (x^2 + 1)x.$$

Siccome

$$(A^2 + 1)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 & 6 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

deduciamo che $\mu_\Psi(x) = \chi_\Psi(x) = (x^2 + 1)x^2$. Ripetendo lo stesso ragionamento per Π , deduciamo allo stesso modo che $\mu_\Pi(x) = \chi_\Pi(x) = (x^2 + 1)x^2$.

- (B) La decomposizione primaria di Ψ è data da

$$\mathbb{R}^4 = V_\Psi(x^2 + 1) \oplus^{\text{int}} V_\Psi(x^2) = \ker(\Psi^2 + \text{Id}) \oplus^{\text{int}} \text{Ker}(\Psi^2).$$

Risolvendo gli opportuni sistemi lineari omogenei, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\begin{aligned}\ker(\Psi^2 + \text{Id}) &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ \ker(\Psi^2) &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.\end{aligned}$$

- (C) Gli autovalori di Π sono le radici del polinomio caratteristico e dunque sono $i, -i, 0$.

I primi due autovalori hanno molteplicità algebrica 1, e dunque molteplicità geometrica e indice uguali a 1. Ciò implica che, per gli autovalori $\pm i$, gli autospazi generalizzati di indice maggiore di uno coincidono con l'autospazio (di indice uno) il quale ha dimensione uguale a uno. Risolvendo gli opportuni sistemi lineari omogenei, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\mathcal{E}_i(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_{-i}(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ 1-i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per quando riguarda l'autovalore 0, siccome la sua molteplicità come radice di μ_Π è due, allora sappiamo dalla teoria che avremo la seguente catena di autospazi generalizzati

$$\{0\} \subsetneq \mathcal{E}_0^1(\Pi) = \mathcal{E}_0(\Pi) \subsetneq \mathcal{E}_0^\infty(\Pi).$$

Risolvendo i sistemi lineari omogenei in questione, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*):

$$\mathcal{E}_0^1(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathcal{E}_0^2(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

- (D) Siccome i polinomi minimi di Ψ e Π non sono prodotto di fattori lineari distinti perché contengono il fattore x^2 , allora né Ψ né Π è diagonalizzabile.
(E) Dalla teoria sappiamo che per un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ vale che

$$\mu_{\Psi,v}(x)|x^2 + 1 \Leftrightarrow (\Psi^2 + \text{Id})(v) = 0 \Leftrightarrow v \in V_\Psi(x^2 + 1).$$

Siccome l'unico divisore proprio di $x^2 + 1$ in $\mathbb{R}[x]$ è 1 e $\mu_{\Psi,v}(x) = 1$ se e solo se $v = 0$, ne deduciamo che

$$\mu_{\Psi,v}(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow v \in V_\Psi(x^2 + 1) \setminus \{0\}.$$

Osserviamo che per un vettore $w \in \mathbb{C}^4$ vale che $\mu_{\Pi,w}(x) = x^4$ se e solo se $\mu_{\Pi,w}(x)|x^2$ ma $\mu_{\Pi,w}(x) \nmid x$. Dalla definizione di polinomio minimo, sappiamo che per un vettore $w \in \mathbb{C}^4$ vale che

$$\begin{cases} \mu_{\Pi,w}(x)|x \Leftrightarrow w \in \ker(\Phi) = \mathcal{E}_0(\Pi), \\ \mu_{\Pi,w}(x)|x^2 \Leftrightarrow w \in \ker(\Phi^2) = \mathcal{E}_0^2(\Pi). \end{cases}$$

Da questo deduciamo che

$$\mu_{\Pi,w}(x) = x^2 \Leftrightarrow w \in \mathcal{E}_0^2(\Pi) \setminus \mathcal{E}_0^1(\Pi).$$

ESERCIZIO 3 (8 punti)

Sia V_1 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_3 - X_4 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_3 = 0, \end{cases}$$

e sia V_2 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_3 - X_4 = 0, \end{cases}$$

- (A) (1,5 punti) Determinare una base di V_1 , di V_2 e di $V_1 \cap V_2$.
(B) (1 punto) Calcolare la dimensione di $V_1 + V_2$ usando la formula di Grassmann, e scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana.
(C) (2,5 punti) Dire se esiste un'applicazione lineare $\Phi \in \text{End}(\mathbb{Q}^4)$ tale che $\ker \Phi = V_1$ e $\text{Im } \Phi = V_2$, e in caso affermativo, si scriva esplicitamente una tale Φ .

- (D) (1,5 punti) Usando l'identificazione canonica $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$, si calcolino $\text{Ann}(V_1)$ e $\text{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana.
- (E) (1,5 punti) Scrivere $\text{Ann}(V_1) \cap \text{Ann}(V_2)$ in forma parametrica e $\text{Ann}(V_1) + \text{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana.

Soluzione:

[NOTA: l'esercizio era stata pensato con l'ultima equazione per V_2 uguale a $X_1 - X_3 + X_4 = 0$. A causa di questo refuso, gran parte dell'esercizio diventa banale (e quindi molto più semplice)!!]

- (A) Risolvendo il primo sistema lineare (*qua andavano inseriti i conti*), otteniamo che una base di V_1 è data da

$$\left\{ v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Risolvendo il secondo sistema lineare (*qua andavano inseriti i conti*), otteniamo che una base di V_2 è data da

$$\left\{ w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Osserviamo che $v_1 = w_1$ e dunque $V_2 \subseteq V_1$. Ne concludiamo che $V_1 \cap V_2 = V_2$.

- (B) Siccome $V_2 \subseteq V_1$ come visto nel punto precedente, allora abbiamo che $V_1 + V_2 = V_1$. Dunque la dimensione di $V_1 + V_2$ è uguale a due e una sua forma cartesiana è uguale alla forma cartesiana di V_1 .
- (C) Una tale applicazione Φ non esiste.

Infatti, se una tale Φ esistesse, dal teorema di rango-nullità avremmo che

$$4 = \dim \mathbb{Q}^4 = \dim \ker(\Phi) + \dim \text{Im}(\Phi) = \dim V_1 + \dim V_2 = 2 + 1 = 3,$$

che è assurdo.

- (D) Usando la formula

$$(0.2) \quad \text{Ann}(\text{Span}_A) = \text{Sol}_{A^t},$$

e partendo dalla forma parametriche di V_1 e V_2 ottenute nel punto (A), deduciamo che una forma cartesiana di $\text{Ann}(V_1)$ è data da

$$\begin{cases} X_1 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_4 = 0, \end{cases}$$

mentre una forma cartesiana di $\text{Ann}(V_2)$ è data da

$$\{ X_1 + X_3 = 0.$$

- (E) Siccome Ann scambia l'intersezione con la somma, allora usando quanto stabilito in (A) e (B), abbiamo che

$$\begin{cases} \text{Ann}(V_1) \cap \text{Ann}(V_2) = \text{Ann}(V_1 + V_2) = \text{Ann}(V_1), \\ \text{Ann}(V_1) + \text{Ann}(V_2) = \text{Ann}(V_1 \cap V_2) = \text{Ann}(V_2). \end{cases}$$

Ora usando le formule

$$(0.3) \quad \text{Ann}(\text{Sol}_A) = \text{Span}_{A^t} \quad \text{e} \quad \text{Ann}(\text{Span}_A) = \text{Sol}_{A^t}$$

e le equazioni cartesiane di V_1 (date nel testo) e parametriche di V_2 (trovate in (A)), otteniamo che

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ann}(V_1) \cap \text{Ann}(V_2) = \text{Ann}(V_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \text{Ann}(V_1) + \text{Ann}(V_2) = \text{Ann}(V_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_3 = 0 \right\}. \end{array} \right.$$

ESERCIZIO 4 (8 punti)

Si consideri l'applicazione lineare $\Theta \in \text{Hom}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^4)$ la cui matrice canonica è

$$M(\Theta) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (A) (1,5 punti) Trovare una base di $\text{Ker}(\Theta)$ e una base di $\text{Im}(\Theta)$.
- (B) (2 punti) Trovare una base del dominio e una base del codominio rispetto alle quali Θ si scrive in forma canonica (rispetto alla relazione di equivalenza).
- (C) (1,5 punti) Usando le identificazioni canoniche $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$ e $(\mathbb{Q}^3)^* \cong \mathbb{Q}^3$, si consideri l'applicazione duale $\Theta^* \in \text{Hom}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^3)$. Calcolare $\text{Ker}(\Theta^*)$ in forma parametrica e $\text{Im}(\Theta^*)$ in forma cartesiana.
- (D) (2 punti) Sia $V := \mathbb{Q}^3 / \text{Ker}(\Theta)$ e $W := \text{Im}(\Theta)$. Si consideri l'isomorfismo indotto da Θ :

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} : V &\longrightarrow W, \\ x + \text{Ker}(\Theta) &\mapsto \Theta(x). \end{aligned}$$

Trovate una base $\mathcal{B}$ di V e una base $\mathcal{C}$ di W e scrivere $M_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\bar{\Theta})$.

- (E) (1 punti) Calcolare l'operatore inverso $(\bar{\Theta})^{-1}$ di $\bar{\Theta}$.

Soluzione:

- (A) Risolvendo il sistema lineare omogeneo con matrice associata $M(\Theta)$ (*qua andavano inseriti i conti*), otteniamo che una base di $\text{Ker}(\Theta)$ è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Applicando il teorema di rango-nullità Φ , otteniamo che

$$\dim \text{Im}(\Theta) = \dim \mathbb{Q}^3 - \dim \ker(\Theta) = 3 - 1 = 2.$$

Siccome $\text{Im}(\Theta)$ è generato dalle colonne della matrice $M(\Theta)$ e le prime due colonne sono linearmente indipendenti in quanto non proporzionali, deduciamo che una base di $\text{Im}(\Theta)$ è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(B) Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{Q}^3$ e $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ la base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

Consideriamo la base $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\ker(\Theta)$ trovata in (A) ed estendiamola ad una base di $\mathbb{Q}^3$ aggiungendo $\{e_1, e_2\}$. Ora calcoliamo

$$\Theta(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta(e_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ed estendiamo questi due vettori ad una base di $\mathbb{Q}^4$ aggiungendo f_1 e f_2 . Dunque, se consideriamo le due basi ordinate di $\mathbb{Q}^3$ e $\mathbb{Q}^4$

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

abbiamo che

$$M_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\Theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che è la forma canonica richiesta.

(C) Dalla teoria e da quanto calcolato in (A), sappiamo che

$$\ker(\Theta^*) = \text{Ann}(\text{Im}(\Theta)) = \text{Ann} \left(\text{Span} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \text{Sol} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo il sistema lineare omogeneo di cui sopra (*qua andavano inseriti i conti*), otteniamo che

$$\ker(\Theta^*) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Similmente, abbiamo che

$$\text{Im}(\Theta^*) = \text{Ann}(\ker(\Theta)) = \text{Ann} \left(\text{Span} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Sol} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(D) Siccome abbiamo che $\mathbb{Q}^3 = \ker(\Theta) \oplus^{\text{int}} \langle e_1, e_2 \rangle$ (come già osservato nel punto (B)), allora sappiamo dalla teoria che una base ordinata di $\mathbb{Q}^3 / \ker(\Theta)$ è data da

$$\mathcal{B} := \{b_1 := e_1 + \ker(\Theta), b_2 := e_2 + \ker(\Theta)\}.$$

D'altra parte, dal punto (A) sappiamo che una base ordinata di $\text{Im}(\Theta)$ è data da:

$$\mathcal{C} := \left\{ c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 := \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Siccome $\bar{\Theta}(b_1) = \Theta(e_1) = c_1$ e $\bar{\Theta}(b_2) = \Theta(e_2) = c_2$, allora avremmo che

$$M_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\bar{\Phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(E) Basta determinare la matrice di $(\bar{\Phi})^{-1}$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ del dominio e $\mathcal{B}$ del codominio. Usando quanto visto a teoria e il punto (D), otteniamo che

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}((\bar{\Phi})^{-1}) = M_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\bar{\Phi})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 5 (8 punti)

Sia $\Phi \in \text{End}(V)$ un operatore e consideriamo la sua decomposizione primaria $V = V_{\Phi}(p_1) \oplus \dots \oplus V_{\Phi}(p_r)$. Dimostrare che Φ è ciclico se e solo se $\Phi|_{V_{\Phi}(p_i)}$ è ciclico per ogni $1 \leq i \leq r$.

Soluzione:

Mostriamo separatamente le due implicazioni.

$\Rightarrow$: Se Φ è ciclico, allora sappiamo dalla teoria che per ogni sottospazio $W \leq V$ Φ -invariante si ha che $\Phi|_W$ è ciclico. In particolare, $\Phi|_{V_{\Phi}(p_i)}$ è ciclico per ogni $1 \leq i \leq r$.

$\Leftarrow$: Fissiamo un generatore v_i per ogni $\Phi|_{V_{\Phi}(p_i)}$, cioè un elemento $v_i \in V_{\Phi}(p_i)$ tale che $V_{\Phi}(p_i) = \langle \Phi, v_i \rangle$. Mostriamo che $v := v_1 + \dots + v_r$ è un generatore di V rispetto a Φ , cioè:

$$V = \langle \Phi, v \rangle.$$

A tal fine, usando che $V = V_{\Phi}(p_1) \oplus \dots \oplus V_{\Phi}(p_r) = \langle \Phi, v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \Phi, v_r \rangle$, basta mostrare che

$$(0.4) \quad v_i \in \langle \Phi, v \rangle \quad \text{per ogni } 1 \leq i \leq r.$$

Poniamo $q_i(x) := \prod_{j \neq i} p_j(x)$ e osserviamo che, siccome $q_i(x)$ è multiplo di ciascun polinomio $\mu_{\Phi, v_j}(x) = p_j(x)$ con $1 \leq j \neq i \leq r$, abbiamo che

$$(0.5) \quad q_i(\Phi)(v) = q_i(\Phi)(v_1 + \dots + v_r) = q_i(\Phi)(v_i).$$

Siccome $p_i(x)$ e $q_i(x)$ sono coprimi tra di loro, allora l'identità di Bezout ci fornisce due polinomi $f(x), g(x)$ tali che

$$1 = f(x)q_i(x) + g(x)p_i(x).$$

Applichiamo questa identità all'operatore Φ e poi valutando in v_i , e usando che $\mu_{\Phi, v_i}(x) = p_i(x)$, otteniamo

$$(0.6) \quad v_i = f(\Phi)(q_i(\Phi)(v_i)) + g(\Phi)(p_i(\Phi)(v_i)) = f(\Phi)(q_i(\Phi)(v_i)).$$

Mettendo insieme (0.6) e (0.5), deduciamo che

$$v_i = (f \cdot q_i)(\Phi)(v),$$

da cui si evince che vale (0.4).