SOLUZIONI DELL'APPELLO X DEL CORSO GE110
2 SETTEMBRE 2019

ESERCIZIO 1 (8 punti)

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Si consideri l'operatore lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ univocamente determinato da

$$\begin{cases} \Phi(e_1) = e_1 - e_3 - 2e_4, \\ \Phi(e_2) = e_2 + e_3 + 2e_4, \\ \Phi(e_3) = e_1 - e_2 - 3e_3 - 7e_4, \\ \Phi(e_4) = -2e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4. \end{cases}$$

(A) (1,5 punti) Si calcoli il polinomio caratteristico di Φ e si mostri che gli autovalori di Φ sono 0 e 1.

(B) (1,5 punti) Per ciascun autovalore di Φ si determinino gli autospazi generalizzati corrispondenti.

(C) (1,5 punti) Si determini la forma canonica di Jordan di Φ.

(D) (1,5 punti) Si calcoli il polinomio minimo di $\mu_{\Phi,v}$ di Φ rispetto al vettore

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e si determini una base del sottospazio ciclico $\langle \Phi, v \rangle$.

(E) (2 punti) Si determini una base di Jordan, cioè una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ tale che $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ si scrive in forma canonica di Jordan.

Soluzione:

(A) La matrice canonica di Φ è data da

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di Φ è dato da

$$\chi_\Phi(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & x-1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x+3 & -1 \\ 2 & -2 & 7 & x-2 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il determinante della matrice di sopra, effettuiamo le seguenti operazioni elementari sulle colonne

$$\begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & x-1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x+3 & -1 \\ 2 & -2 & 7 & x-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 \to C_4 + 2C_3]{C_1 \to C_1 + (x-1)C_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ x-1 & x-1 & 1 & 3 \\ x^2+2x-2 & -1 & x+3 & 2x+5 \\ 7x-5 & -2 & 7 & x+12 \end{pmatrix}$$

Le operazioni elementari effettuate non cambiano il determinante. Facendo lo sviluppo di Laplace lungo la prima riga, otteniamo che

$$\chi_\Phi(x) = -\det\begin{pmatrix} x-1 & x-1 & 3 \\ x^2+2x-2 & -1 & 2x+5 \\ 7x-5 & -2 & x+12 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il determinante della matrice di sopra, effettuiamo le seguenti operazioni elementari sulle righe

$$\begin{pmatrix} x-1 & x-1 & 3 \\ x^2+2x-2 & -1 & 2x+5 \\ 7x-5 & -2 & x+12 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-2R_2]{R_1\to R_1+(x-1)R_2} \begin{pmatrix} (x-1)(x^2+2x-1) & 0 & 2x^2+3x-2 \\ x^2+2x-2 & -1 & 2x+5 \\ -2x^2+3x-1 & 0 & -3x+2 \end{pmatrix}$$

Facendo lo sviluppo di Laplace lungo la seconda colonna, otteniamo che

$$\chi_\Phi(x) = \begin{pmatrix} (x-1)(x^2+2x-1) & 2x^2+3x-2 \\ -2x^2+3x-1 & -3x+2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-1)(x^2+2x-1)(-3x+2) - (2x^2+3x-2)(-2x^2+3x-1) = x^3(x-1).$$

Siccome gli autovalori di Φ sono le radici del suo polinomio caratteristico, otteniamo che 0 e 1 sono gli autovalori di Φ.

(B) Siccome la molteplicità di 1 come radice di χ_Φ è uno, allora dalla teoria sappiamo che gli autospazi generalizzati relativi a 1 saranno

$$\{0\} \subsetneq \mathcal{E}_1(\Phi) = \mathcal{E}_1^1(\Phi) = \mathcal{E}_1^\infty(\Phi).$$

Usando che $\mathcal{E}_1(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{id}) = \mathrm{Sol}_{M(\Phi)-I_4}$, e risolvendo il sistemi lineari omogeneo, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*):

$$\mathcal{E}_1(\Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Siccome la molteplicità di 0 come radice di χ_Φ è tre, allora sappiamo dalla teoria che avremo la seguente catena di autospazi generalizzati

$$\{0\} \subsetneq \mathcal{E}_0^1(\Phi) = \mathcal{E}_0(\Phi) \subseteq \mathcal{E}_0^2(\Phi) \subseteq \mathcal{E}_0^3(\Phi) = \mathcal{E}_0^\infty(\Phi).$$

Usando che $\mathcal{E}_0^i(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Phi^i) = \mathrm{Sol}_{M(\Phi)^i}$ per ogni $i = 1, 2, 3$, e risolvendo i sistemi lineari omogenei, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*):

$$\mathcal{E}_0^1(\Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathcal{E}_0^2(\Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathcal{E}_0^3(\Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si verifica facilmente che i tre sottospazi generalizzati qui sopra sono tutti diversi tra di loro.

(C) Siccome $\chi_\Phi(x) = x^3(x-1)$, allora la forma canonica di Jordan di Φ sarà della forma $\mathrm{diag}(J_{(1)}(1), J_{\underline{m}}(0))$ per una certa partizione $\underline{m} = (m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_r \geq 1)$ tale $|\underline{m}| = 3$. Siccome abbiamo calcolato nel punto (B) che $\mathcal{E}_0^2(\Phi) \neq \mathcal{E}_0^3(\Phi)$, allora necessariamente deve essere $\underline{m} = (3)$. Pertanto la forma canonica di Jordan di Φ è $(J_{(1)}(1), J_{(3)}(0))$.

(D) Da quanto calcolato nel punto (B), si vede che $v \in \mathcal{E}_0^3(\Phi) \setminus \mathcal{E}_0^2(\Phi)$. Dunque $\mu_{\Phi,v}(x) = x^3$. Dunque una base del sottospazio ciclico $\langle \Phi, v \rangle$ è

$$\left\{ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \Phi^2(v) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(E) Affinché una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ sia tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = (J_{(1)}(1), J_{(3)}(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

è necessario e sufficiente che $\mathcal{B} = \{z, w, \Phi(w), \Phi^2(w)\}$ con $0 \neq z \in \mathcal{E}_1(\Phi)$ e $w \in \mathcal{E}_0^3(\Phi) \setminus \mathcal{E}_0^2(\Phi)$. Da quanto calcolato nei punti (B) e (D), possiamo scegliere

$$z := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w := v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e dunque otteniamo che una base di Jordan è data da

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 & 2 \\ -5 & 3 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Si consideri l'operatore lineare $\Psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Psi)$ è uguale ad A e l'operatore lineare $\Pi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Pi)$ è uguale ad A.

(A) (1,5 punti) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di Ψ e di Π.
(B) (1,5 punti) Si calcoli la decomposizione primaria di Ψ.
(C) (1,5 punti) Per ciascun autovalore di Π, si calcolino gli autospazi generalizzati.
(D) (1,5 punti) Si dica se Ψ e Π sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, trovare delle basi diagonalizzanti.
(E) (2 punti) Si calcolino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $\mu_{\Psi,v}(x) = x^2+1$ (qualora esistano) e tutti i vettori $w \in \mathbb{C}^4$ tali che $\mu_{\Pi,w}(x) = x^2 + 1$ (qualora esistano).

Soluzione:

(A) I polinomi caratteristici di Ψ e di Π coincidono e sono uguali al polinomio caratteristico della matrice A. Essendo A una matrice diagonale a blocchi, calcoliamo

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x+3 & -2 & 4 & -2 \\ 5 & x-3 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & x+1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+3 & -2 \\ 5 & x-3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ -4 & x+1 \end{pmatrix} =$$

$$= [(x+3)(x-3)+10]\,(x-1)(x+1) = (x^2+1)(x-1)(x+1) = x^4-1.$$

La decomposizione del polinomio $\chi_A(x)$ in irriducibili è data da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} (x^2+1)(x-1)(x+1) & \text{in } \mathbb{R}[x], \\ (x+i)(x-i)(x-1)(x+1) & \text{in } \mathbb{C}[x]. \end{cases}$$

Siccome il polimonio minimo di Ψ (risp. Π) divide il suo polinomio caratteristico e ha gli stessi fattori irriducibili, dal fatto che tutti i fattori irriducibili di χ_Ψ (risp. χ_Π) appaiono con molteplicità uno deduciamo che

$$\mu_\Phi = \chi_\Phi \quad \text{e} \quad \mu_\Pi = \chi_\Pi.$$

(B) La decomposizione primaria di Ψ è data da

$$\mathbb{R}^4 = V_\Psi(x^2+1) \oplus^{\text{int}} V_\Psi(x-1) \oplus^{\text{int}} V_\Psi(x+1) = \ker(\Psi^2+\mathrm{Id}) \oplus^{\text{int}} \mathrm{Ker}(\Psi-\mathrm{Id}) \oplus^{\text{int}} \mathrm{Ker}(\Psi+\mathrm{Id}).$$

Risolvendo gli opportuni sistemi lineari omogenei, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\ker(\Psi^2+\mathrm{Id}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \mathrm{Ker}(\Psi-\mathrm{Id}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \mathrm{Ker}(\Psi+\mathrm{Id}) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(C) Gli autovalori di Π sono le radici del polinomio caratteristico e dunque sono $i, -i, 1, -1$. Ciascuno di essi ha molteplicità algebrica 1, e dunque molteplicità geometrica e indice uguali a 1. Ciò implica che, per ciascun autovalore, gli autospazi generalizzati di indice maggiore di uno coincidiono con l'autospazio (di indice uno) il quale ha dimensione uguale a uno. Risolvendo gli opportuni sistemi lineari omogenei (gli ultimi due dei quali sono già stati risolti nel punto (B)), troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\mathcal{E}_i(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 3-i \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathcal{E}_{-i}(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 3+i \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathcal{E}_1(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathcal{E}_{-1}(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(D) L'operatore $\Psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ non è diagonalizzabile in quanto il suo polinomio minimo contiene il fattore irriducibile non lineare x^2+1.

L'operatore $\Pi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ è diagonalizzabile perchè il suo polinomio minimo è prodotto di fattori irriducibili lineari con molteplicità uno. Una base diagonalizzante $\mathcal{B}$ si ottiene mettendo insieme una base per ciascun autospazio di Π e dunque, per

quanto calcolato in (C) abbiamo che

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 3-i \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+i \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(E) Dalla definizione di polinomio minimo sappiamo che per un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ vale che

$$\mu_{\Psi,v}(x)|x^2+1 \Leftrightarrow (\Psi^2 + \mathrm{Id})(v) = 0 \Leftrightarrow v \in V_\Psi(x^2+1).$$

Siccome l'unico divisore proprio di x^2+1 in $\mathbb{R}[x]$ è 1 e $\mu_{\Psi,v}(x) = 1$ se e solo se $v = 0$, ne deduciamo che

$$\mu_{\Psi,v}(x) = x^2+1 \Leftrightarrow v \in V_\Psi(x^2+1) \setminus \{0\}.$$

Similmente, per un vettore $w \in \mathbb{C}^4$ vale che

$$\mu_{\Pi,w}(x)|x^2+1 \Leftrightarrow (\Pi^2 + \mathrm{Id})(w) = 0 \Leftrightarrow w \in V_\Pi(x^2+1) = \mathcal{E}_i(\Pi) \oplus^{\mathrm{int}} \mathcal{E}_{-i}(\Pi).$$

I divisori massimali di x^2+1 in $\mathbb{C}[x]$ sono $x-i$ e $x+i$ e vale che

$$\begin{cases} \mu_{\Pi,w}(x)|x-i \Leftrightarrow w \in \mathcal{E}_i(\Pi), \\ \mu_{\Pi,w}(x)|x+i \Leftrightarrow w \in \mathcal{E}_{-i}(\Pi). \end{cases}$$

Da questo deduciamo che

$$\mu_{\Pi,w}(x) = x^2+1 \Leftrightarrow w \in \mathcal{E}_i(\Pi) \oplus^{\mathrm{int}} \mathcal{E}_{-i}(\Pi) \setminus \{\mathcal{E}_i(\Pi) \cup \mathcal{E}_{-i}(\Pi)\}.$$

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 + X_3 = 0, \\ X_4 = 0, \end{cases}$$

e sia V_2 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 + 2X_4 = 0, \\ X_3 = 0, \end{cases}$$

(A) (1 punti) Determinare una base di V_1, di V_2 e di $V_1 \cap V_2$.
(B) (1 punti) Calcolare la dimensione di $V_1 + V_2$ usando la formula di Grassmann, e scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana.
(C) (3 punti) Dire se esiste un'applicazione lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^4)$ tale che $\ker \Phi = V_1$ e $\mathrm{Im}\, \Phi = V_2$, e in caso affermativo, si scriva esplicitamente una tale Φ.
(D) (1,5 punti) Usando l'identificazione canonica $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$, si calcolino $\mathrm{Ann}(V_1)$ e $\mathrm{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana.
(E) (1,5 punti) Scrivere $\mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2)$ in forma parametrica e $\mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana.

Soluzione:

(A) Risolvendo il primo sistema lineare, otteniamo che una base di V_1 è data da

$$\left\{ v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Risolvendo il secondo sistema lineare, otteniamo che una base di V_2 è data da

$$\left\{ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, z := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'intersezione $V_1 \cap V_2$ si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo ottenuto mettendo insieme i sistemi lineari omogenei che definiscono V_1 e V_2, cioè

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 = 0, \\ X_3 = 0, \\ X_4 = 0, \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema lineare, otteniamo che una base di $V_1 \cap V_2$ è data da

$$\left\{ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(B) Applicando la formula di Grassmann, otteniamo che

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Dunque per trovare una forma cartesiana di $V_1 + V_2$, sarà sufficiente trovare un'equazione non nulla soddisfatta dai generatori di $V_1 + V_2$ che sono $\{v, w, z\}$. Una tale equazione è

$$-X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 = 0.$$

(C) Una tale applicazione Φ esiste e può essere costruita nel seguente modo.

Si consideri la base $\{v, w\}$ di V_1 trovata in (A) e si completi ad una base di $\mathbb{Q}^4$, per esempio

$$\mathcal{B} = \{v, w, e_1, e_4\},$$

dove e_i sono gli elementi della base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

Similmente si consideri la base $\{v, z\}$ di V_2 trovata in (A) e si completi ad una base di $\mathbb{Q}^4$, per esempio

$$\mathcal{C} = \{v, z, e_1, e_3\},$$

Ora un'applicazione Φ con le proprietà richieste è quella univocamente determinata da

$$\begin{cases} \Phi(v) = 0, \\ \Phi(w) = 0, \\ \Phi(e_1) = v, \\ \Phi(e_4) = z. \end{cases}$$

In altre parole, la matrice di Φ rispetto alla base $\mathcal{B}$ del dominio e la base $\mathcal{C}$ del codominio è

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(D) Usando la formula

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Span}_A) = \mathrm{Sol}_{A^t}, \tag{0.2}$$

e partendo dalla forma parametriche di V_1 e V_2 ottenute nel punto (A), deduciamo che una forma cartesiana di $\mathrm{Ann}(V_1)$ è data da

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ -X_2 + X_3 = 0, \end{cases}$$

mentre una forma cartesiana di $\mathrm{Ann}(V_2)$ è data da

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0, \\ 2X_1 + X_4 = 0. \end{cases}$$

(E) Siccome Ann scambia l'intersezione con la somma, abbiamo che

$$\begin{cases} \mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2) = \mathrm{Ann}(V_1 + V_2) = \mathrm{Ann}(V_1), \\ \mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2) = \mathrm{Ann}(V_1 \cap V_2) = \mathrm{Ann}(V_2). \end{cases}$$

Ora usando le formule

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Sol}_A) = \mathrm{Span}_{A^t} \quad \text{e} \quad \mathrm{Ann}(\mathrm{Span}_A) = \mathrm{Sol}_{A^t} \tag{0.3}$$

e le equazioni cartesiane di $V_1 + V_2$ (trovate in (B)) e parametriche di $V_1 \cap V_2$ (trovate in (A)), otteniamo che

$$\begin{cases} \mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \ : x_1 + x_2 = 0 \right\}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare $\Theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ la cui matrice canonica è

$$M(\Theta) = B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(A) (1,5 punti) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(\Theta)$ e un'equazione cartesiana di $\mathrm{Im}(\Theta)$.
(B) (2,5 punti) Trovare una base del dominio e una base del codominio rispetto alle quali Θ si scrive in forma canonica (rispetto alla relazione di equivalenza).
(C) (2,5 punti) Trovare due matrici $P, Q \in M_4(\mathbb{Q})$ invertibili tali che

$$P \cdot B \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(D) (1,5 punti) Usando l'identificazione canoniche $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$, si consideri l'applicazione duale $\Theta^* \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$. Calcolare $\mathrm{Ker}(\Theta^*)$ in forma parametrica e $\mathrm{Im}(\Theta^*)$ in forma cartesiana.

Soluzione:

(A) Risolvendo il sistema lineare omogeneo con matrice associata $M(\Theta)$ (*qua andavano inseriti i conti*), otteniamo che un base di $\mathrm{Ker}(\Theta)$ è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Applicando il teorema di rango-nullità Φ, otteniamo che

$$\dim \mathrm{Im}(\Theta) = \dim \mathbb{Q}^4 - \dim \ker(\Theta) = 4 - 1 = 3.$$

Dunque per trovare una forma cartesiana di $\mathrm{Im}(\Theta)$, sarà sufficiente trovare un'equazione non nulla soddisfatta dai generatori di $\mathrm{Im}(\Theta)$ che sono le colonne della matrice $M(\Theta)$. Prendendo un'equazione generica $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4$, imponendo che si annulli sulle colonne della matrice $M(\Theta)$ e risolvendo il sistema nelle incognite λ_i, otteniamo che una tale equazione è

$$\{-X_1 + X_2 + X_4 = 0.$$

(B) Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

Consideriamo la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\ker(\Theta)$ trovata in (A) ed estendiamola ad una base di $\mathbb{Q}^4$ aggiungendo $\{e_1, e_2, e_3\}$. Ora calcoliamo

$$\Theta(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Theta(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed estendiamo questi vettori ad una base di $\mathbb{Q}^4$ aggiungendo e_1. Dunque, se consideriamo le due basi ordinate di $\mathbb{Q}^4$

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

abbiamo che

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\Theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che è la forma canonica richiesta.

(C) Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica ordinata di $\mathbb{Q}^4$. Applicando la formula di cambiamento di base alla matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\Theta)$ trovata nel punto (B), otteniamo che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\Theta) = M_{\mathcal{C},\mathcal{E}} \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\Theta) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}^{-1} \cdot B \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$$

Dunque, usando la formula $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}^{-1}$, otteniamo che le matrici richieste sono

$$Q = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = M_{\mathcal{C},\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(D) Dalla teoria e da quanto calcolato in (A), sappiamo che

$$\ker(\Theta^*) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Im}(\Theta)) = \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Sol}_{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Similmente, abbiamo che

$$\mathrm{Im}(\Theta^*) = \mathrm{Ann}(\ker(\Theta)) = \mathrm{Ann}\left(\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right) = \mathrm{Sol}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

ESERCIZIO 5 (8 punti)

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ e sia $\mu_\Phi(x) = p_1(x)^{e_i} \dots p_r(x)^{e_r}$ la fattorizzazione del suo polinomio minimo in irriducibili. Si consideri la decomposizione primaria di V rispetto a Φ:

$$V = V_\Phi(p_1) \oplus^{\mathrm{int}} \dots \oplus^{\mathrm{int}} V_\Phi(p_r).$$

Sia $U \leq V$ un sottospazio Φ-invariante. Si mostri che

$$U = (U \cap V_\Phi(p_1)) \oplus^{\mathrm{int}} \dots \oplus^{\mathrm{int}} (U \cap V_\Phi(p_r)).$$

Soluzione:

Osserviamo innanzitutto che $\{U \cap V_\Phi(p_i)\}_i$ è una famiglia indipendente di sottospazi (perché $\{V_\Phi(p_i)\}_i$ lo è); dunque ha senso la somma diretta interna che sta a destra dell'uguaglianza di sopra e inoltre vale chiaramente l'inclusione

$$U \supseteq (U \cap V_\Phi(p_1)) \oplus^{\mathrm{int}} \dots \oplus^{\mathrm{int}} (U \cap V_\Phi(p_r)).$$

Al fine di mostrare l'inclusione opposta, si noti che, siccome i polinomi $\{p_1^{e_1}, \dots p_r^{e_r}\}$ sono a due a due coprimi tra di loro, dalla relazione di Bezout segue che esistono dei polinomi $\{q_i(x) \in K[x]\}_i$ (dove K è il campo dei coefficienti di V) tali che

$$1 = \sum_{i=1}^{r} q_i(x) \frac{\mu_\Phi(x)}{p_i(x)^{e_i}}.$$

Applicando questa identità all'operatore Φ e poi valutando il risultato su un elemento arbitrario $u \in U$, otteniamo che

$$u = \sum_{i=1}^{r} \left(q_i \frac{\mu_\Phi}{p_i^{e_i}} \right)(\Phi)(u) := \sum_{i=1}^{r} u_i. \tag{0.4}$$

Per ciascun i, l'elemento u_i appartiene a U perché U è Φ-invariante ed appartiene a $V_\Phi(p_i)$ perché

$$p_i^{e_i}(\Phi)(u_i) = (q_i \cdot \mu_\Phi)(\Phi)(u) = 0,$$

in quanto $\mu_\Phi(\Phi) = 0$ per definizione di polinomio minimo di Φ. Quindi $u_i \in U \cap V_\Phi(p_i)$ e la scrittura (0.4) mostra che vale l'inclusione

$$U \subseteq (U \cap V_\Phi(p_1)) \oplus^{\text{int}} \ldots \oplus^{\text{int}} (U \cap V_\Phi(p_r)),$$

come volevasi dimostrare.