SOLUZIONI DELLA PRIMA PROVA IN ITINERE DEL CORSO GE110
11 APRILE 2019

ESERCIZIO 1 (15 punti)

Sia V_1 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dall'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 + X_4 = 0, \\ X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 = 0, \\ X_1 - X_3 - X_4 = 0, \end{cases}$$

e V_2 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ dato da

$$V_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(A) Scrivere V_1 in forma parametrica e determinare una sua base.
(B) Determinare una base di V_2 e scrivere V_2 in forma cartesiana.
(C) Scrivere $V_1 \cap V_2$ in forma parametrica e determinare una sua base.
(D) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e determinare una sua base.
(E) Trovare un sottospazio complementare di V_1, cioè un sottospazio W tale che $\mathbb{Q}^4 = V_1 \oplus^{\text{int}} W$.

Soluzione:

(A) Per trovare una base di V_1, e dunque anche scrivere V_1 in forma parametrica, dobbiamo risolvere il sistema che definisce V_1. Operiamo l'eliminazione di Gauss-Jordan per righe sulla matrice associata al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque delle equazioni cartesiane per V_1 sono date da

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 + X_4 = 0, \end{cases}$$

mentre una sua rappresentazione parametrica insieme ad una sua base sono date da:

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t+s \\ -t \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{Q} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(B) Per trovare una base di V_2, operiamo l'eliminzaione di Gauss-Jordan per colonne sulla matrice le cui colonne sono i generatori di V_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \to C_3 - 2C_1]{C_2 \to C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 \to C_4 - C_2]{C_3 \to C_3 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque deduciamo che una base di V_2 è formata da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per transformare V_2 in forma cartesiana, si consideri un'equazione lineare $\lambda_1 X_2 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0$ con coefficienti che sono incognite. Tale equazione lineare si annulla sulla base di V_2 sopra trovata se e solo se i suoi coefficienti verificano le seguenti due equazioni:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Ricavando λ_1 dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda equazione, otteniamo che il precedente sistema è equivalente al seguente

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_4, \\ \lambda_3 = 2\lambda_2 - \lambda_4. \end{cases}$$

Prendendo una base delle soluzioni del precedente sistema, otteniamo che dellle equazioni cartesiane di V_2 sono

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 = 0, \\ X_2 + X_4 = 0. \end{cases}$$

(C) Le equazioni cartesiane per $V_1 \cap V_2$ si ottengono mettendo insieme le equazioni cartesiane di V_1 e V_2 e dunque sono date da:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 + X_4 = 0, \\ X_1 + X_2 + 2X_3 = 0, \end{cases}$$

Per trovare una base di $V_1 \cap V_2$, e dunque anche una sua rappresentazione parametrica, dobbiamo risolvere il sistema di sopra. Facendo la differenza tra la prima e la terza equazione, otteniamo $X_3 = 0$. Sostituendo nel sistema, otteniamo che:

$$\begin{cases} X_1 = X_4, \\ X_2 = -X_4, \\ X_3 = 0. \end{cases}$$

Dunque una base per $V_1 \cap V_2$ è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(D) Una rappresentazione parametrica di $V_1 + V_2$ si ottiene mettendo insieme le basi di V_1 e V_2, e dunque

$$V_1 + V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Applicando la formula di Grassmann, calcoliamo che

$$\dim(V+1) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Dunque i tre generatori di $V_1 + V_2$ scritti sopra sono anche un base di $V_1 + V_2$.

Ora notiamo che i tre elementi della base di V_1+V_2 sono tali verificano l'equazione $X_2 + X_4 = 0$, e dunque $V_1 + V_2 \subseteq \mathrm{Sol}(X_2 + X_4 = 0)$. Tuttavia siccome $\dim V_1 + \dim V_2 = 3$ (per quanto sopra calcolato) e $\dim \mathrm{Sol}(X_2 + X_4 = 0) = 3$ (per il teorema di rango-nullità), allora deve valere che

$$V_1 + V_2 = \mathrm{Sol}(X_2 + X_4 = 0),$$

e dunque le equazioni cartesiane di $V_1 + V_2$ sono $X_2 + X_4 = 0$.

(E) Siccome una base di V_1 è formata da

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\},$$

un complementare di V_1 è il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ dato da

$$W = \langle e_1, e_2 \rangle,$$

dove e_1 e e_2 sono i primi due elementi della base canonica.

Infatti, la matrice le cue colonne sono i vettori che formano una base di V_1 insieme ai vettori $\{e_1, e_2\}$ che sono una base di W, ha quattro pivot, il che mostra che $V_1 \oplus W = \mathbb{Q}^4$. Dalla formula di Grassmann, si deduce che

$$\dim(V_1 \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V_1 + W) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Ciè implica che $V_1 \cap W = \{0\}$ e dunque che $V_1 \oplus^{\mathrm{int}} W = \mathbb{Q}^4$.

ESERCIZIO 2 (7 punti)

Si considerino i seguenti due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$:

$$I := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix} \right\} \subset S := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\}.$$

(A) Dimostrare che I è lineramente indipendente.
(B) Dimostrare che S è generante.
(C) Determinare una base B di $\mathbb{R}^4$ tale che $I \subseteq B \subseteq S$.

Soluzione:

Applichiamo l'eliminazione di Gauss-Jordan per colonne alla matrice le cui colonne sono gli elementi di S utilizzando, se possibile, i pivot sulla prima e sulla terza colonna che sono i vettori di I:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_5 \to C_5 - C_1]{\substack{C_2 \to C_2 - 2C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \\ C_4 \to C_4 + C_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{C_2 \to C_2 - C_3 \\ C_4 \to C_4 + C_3 \\ C_6 \to C_6 + C_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_6 \to \frac{C_6}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{C_4 \to C_4 - 3C_6 \\ C_5 - 3C_6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_5 \to C_5 - C_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dall'eliminazione di Gauss-Jordan appena svolta deduciamo che:

(A) I è linearmente indipendente perchè abbiamo ottenuto dei pivots nella prima e terza colonna che sono i vettori di I.

(B) S è un insieme generante perchè ogni riga contiene un pivot.

(C) Una base B di $\mathbb{R}^4$ tale che $I \subseteq B \subseteq S$ si ottiene prendendo i vettori di S corrispondenti alle colonne che contengono pivots, e dunque

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

[Da notare che l'unica altra scelta di B era

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Bigg].$$

ESERCIZIO 3 (7 punti)

Si consideri il seguente endomorfismo lineare di $\mathbb{C}^3$:

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y - z \\ x + 2y + z \end{pmatrix}.$$

(A) Si determini la matrice associata a Φ rispetto alla basi canoniche del dominio e del codominio.

(B) Dimostrare che Φ è un isomorfismo.

(C) Calcolare l'inverso Φ^{-1} di Φ.

Soluzione:

La matrice associata a Φ è

$$A := M(\Phi) = \begin{pmatrix} \Phi(e_1) & \Phi(e_2) & \Phi(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'operatore è un isomorfismo se e solo se A è invertibile e in tal caso $\Phi^{-1} = \Phi_{A^{-1}}$.

Dunque cerchiamo di calcolare A^{-1} con il metodo dell'eliminazione di Gauss-Jordan per righe:

$$(A|I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_2]{R_3 \to R_3 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 + 3/4 R_3 \\ R_2 \to R_2 - 1/2 R_3}]{R_3 \to 1/4 R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dunque ne concludiamo che

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 4 (9 punti)

Sia $\mathbb{Q}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e $\mathbb{Q}^3$ con base canonica $\{f_1, f_2, f_3\}$. Si consideri l'omomorfismo lineare $\Psi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ univocamente determinato da:

$$\begin{cases} \Psi(e_1) = f_1 - f_2 - f_3, \\ \Psi(e_2) = f_1 - f_2 - 3f_3, \\ \Psi(e_3) = -f_1 + f_2 - f_3, \\ \Psi(e_4) = -f_1 + f_2 - 3f_3. \end{cases}$$

(A) Si determini un base del nucleo di Ψ, e si calcoli la nullità di Ψ.
(B) Si determini una base dell'immagine di Ψ, e si calcoli il rango di Ψ.
(C) Si determini un'applicazione lineare iniettiva $\Pi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^4$ tale che $\Psi \circ \Pi = 0$.

Soluzione:
La matrice canonica di Ψ è:

$$A := M(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(A) Il nucleo $\ker \Psi$ coincide con il sottospazio Sol_A delle soluzioni del sistema lineare omogeno $A \cdot X = 0$ con matrice associata A. Per risolvere tale sistema lineare, applichiamo l'eliminazione di Gauss-Jordan per righe ad A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -1/2 R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dunque il sistema Sis_A è equivalente (cioè ha lo stesso insieme di soluzioni) del sistema

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0, \\ \qquad X_2 + X_3 + 2X_4 = 0. \end{cases}$$

Lo spazio delle soluzioni di questo sistema è:

$$\mathrm{Sol}_A := \left\{ \begin{pmatrix} 2s+3t \\ -s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Dunque la dimensione di $\ker \Psi = \mathrm{Sol}_A$ è due (e quindi $\mathrm{Null}(\Psi) = 2$) e una sua base è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(B) Per il teorema di rango-nullità, abbiamo che

$$\mathrm{rg}(\Psi) = \dim \mathbb{Q}^4 - \dim \mathrm{Null}(\Psi) = 4 - 2 = 2.$$

Una base di $\mathrm{Im}\,\Psi$ sarà dunque formata da due colonne linearmente indipendenti della matrice $M(\Psi)$. Poiché si vede facilmente che le colonne di $M(\Psi)$ sono a due a due non proporzionali, una qualsiasi coppia di colonne di $M(\Psi)$ forma una base di $\mathrm{Im}(\Psi)$.

(C) La condizione $\Psi \circ \Pi = 0$ equivale al fatto che $\mathrm{Im}(\Pi) \subseteq \ker(\Psi)$. Siccome Π è iniettiva e $\dim \ker(\Psi) = 2$, allora dobbiamo avere che $\mathrm{Im}(\Pi) = \ker(\Psi)$ e che Π definisce un isomorfismo tra $\mathbb{Q}^2$ e $\ker(\Psi)$. Dunque, per definire Π, basta mandare gli elementi della base canonica $\{g_1, g_2\}$ si $\mathbb{Q}^2$ in una base di $\ker(\Psi)$, per esempio la base trovata in (A). Dunque possiamo definire Π tramite la formula

$$\begin{cases} \Pi(g_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \\ \Pi(g_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5 (6 punti)

Si consideri la seguenti matrice a coefficienti in $\mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(A) Si determini il rango di A.

(B) Si trovino della matrici invertibili P e Q tali che $P \cdot A \cdot Q$ è in forma canonica rispetto alla relazione di equivalenza.

Soluzione:

Per ridurre A in forma canonica effettuiamo le seguenti operazioni elementari sulle righe e sulle colonne

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 3/2 R_2]{R_2 \to -1/2 R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_3 \to C_3 - 2C_1]{\substack{C_2 \to C_2 + C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 \to C_4 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalla riduzione di sopra, deduciamo che $\text{rg}(A) = 2$ e che le matrici invertibili P e Q richieste sono

$$P = R_{3,2}(3/2) \cdot R_2(-1/2) \cdot R_{3,1}(1) \cdot R_{2,1}(-1),$$
$$Q = C_{2,1}(1) \cdot C_{3,1}(-1) \cdot C_{3,1}(-2) \cdot C_{3,2} \cdot C_{4,2}(-1).$$