SOLUZIONI DEL SECONDO ESONERO DI GE110
3 GIUGNO 2019

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Si consideri l'operatore lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ definito da

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-3z-4w \\ -x-2y+4z+7w \\ x+y-3z-4w \\ -x-y+3z+4w \end{pmatrix}.$$

(A) (1,5 punti) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di Φ.
(B) (1,5 punti) Si calcolino gli autovalori di Φ e, per ciascuno di essi, si determinino gli autospazi generalizzati corrispondenti.
(C) (1,5 punti) Si calcoli il polinomio minimo $\mu_{\Phi,v}$ di Φ rispetto al vettore

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e si determini una base del sottospazio ciclico $\langle \Phi, v\rangle$.
(D) (1,5 punti) Si determini la forma canonica di Jordan di Φ.
(E) (2 punti) Si determini una base di Jordan, cioè una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ tale che $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ si scrive in forma canonica di Jordan.

Soluzione:
(A) La matrice canonica di Φ è uguale a

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio carattertistico è dato da

$$\chi_\Phi(x) = \det(xI_4 - M(\Phi)).$$

Per calcolare il determinante in questione, effettuiamo l'eliminazione di Gauss-Jordan (sia per righe che per colonne)

$$\begin{pmatrix} x-1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & x+2 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & x+3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & x-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2\to R_2-R_4 \\ R_3\to R_3+R_4}]{R_1\to R_1-(x-1)R_4} \begin{pmatrix} 0 & -x & 3x & -x^2+5x \\ 0 & x+1 & -1 & -x-3 \\ 0 & 0 & x & x \\ 1 & 1 & -3 & x-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4\to C_4-C_3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -x & 3x & -x^2+2x \\ 0 & x+1 & -1 & -x-2 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & -3 & x-1 \end{pmatrix}$$

Ora possiamo calcolare il determinante in questione facendo lo sviluppo di Laplace prima lungo la prima colonna e successivamente lungo l'ultima riga e otteniamo che

$$\chi_\Phi(x) = \det(xI_4 - M(\Phi)) = x \det \begin{pmatrix} -x & -x^2+2x \\ x+1 & -x-2 \end{pmatrix} = x^4.$$

Per calcolare il polinomio minimo μ_Φ, sappiamo che $\mu_\Phi | \chi_\Phi$ e dunque avremo che $\mu_\Phi(x) = x^k$ con $k = 1, 2, 3, 4$. Calcoliamo le seguenti potenze di $M(\Phi)$:

$$M(\Phi)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0_4 \quad \text{e} \quad M(\Phi)^3 = 0_4.$$

Dunque deduciamo che $\mu_\Phi = x^3$.

(B) Gli autovalori di Φ sono le radici del polinomio caratteristico di Φ. Siccome $\chi_\Phi = x^4$, abbiamo che 0 è l'unico autovalore di Φ.

Siccome la molteplicità di 0 come radice di $\mu_\Phi(x) = x^3$ è tre, allora sappiamo che avremo la seguente catena di autospazi generalizzati

$$\{0\} \subsetneq \mathcal{E}_0^1(\Phi) \subsetneq \mathcal{E}_0^2(\Phi) \subsetneq \mathcal{E}_0^3(\Phi) = \mathcal{E}_0^\infty(\Phi) = \mathbb{C}^4.$$

Usando che $\mathcal{E}_0^k(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Phi^k) = \mathrm{Sol}_{M(\Phi)^k}$ e risolvendo gli opportuni sistemi lineari, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*):

$$\mathcal{E}_0^1(\Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_0^2(\Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(C) Sappiamo dalla teoria che $\mu_{\Phi,v}$ divide μ_Φ, e dunque avremo che $\mu_{\Phi,v}(x) = x^h$ con $h = 0, 1, 2, 3$. Calcoliamo $\Phi^h(v)$:

$$\Phi(v) = M(\Phi) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi^2(v) = M(\Phi) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi^3(v) = M(\Phi) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque deduciamo che $\mu_{\Phi,v}(x) = x^3$.

Inoltre dalla teoria sappiamo che una base di $\langle \Phi, v \rangle$ è data da

$$\{v, \Phi(v), \Phi^2(v)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(D) Siccome 0 è l'unico autovalore di Φ sappiamo dalla teoria che la forma canonica di Jordan di Φ sarà della forma $J_{\underline{m}}(0)$ per una certa partizione $\underline{m} = (m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_r \geq 1)$. Inoltre, dalla teoria sappiamo che:
- $\text{molt}_0(\chi_\Phi) = 4 \Rightarrow |\underline{m}| = 4$;
- $\text{molt}_0(\mu_\Phi) = 3 \Rightarrow m_1 = 3$.

Dunque l'unica possibilità per la partizione $\underline{m}$ è:

$$\underline{m} = (3, 1).$$

(E) Affinché una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ sia tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = J_{3,1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si deve avere necessariamente che $\mathcal{B} = \{w_1, \Phi(w_1), \Phi^2(w_1), w_2\}$ con w_1 e w_2 tale che

$$\mathcal{E}_0^2(\Phi) \oplus^{\text{int}} \langle w_1 \rangle = \mathbb{C}^4 \quad \text{e} \quad \langle \Phi^2(w_1) \rangle \oplus^{\text{int}} \langle w_2 \rangle = \mathcal{E}_0^1(\Phi).$$

Dal punto (C), deduciamo che $v \notin \mathcal{E}_0^2(\Phi)$ e dunque possiamo prendere $w_1 := v$. Inoltre dal punto (B) e dal punto (C), deduciamo che possiamo prendere

$$w_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque una base di Jordan cercata è

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri l'operatore lineare $\Psi \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ la cui matrice canonica è data da

$$M(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(A) (1,5 punti) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di Ψ.
(B) (1 punti) Si dica se Ψ è triangolarizzabile.
(C) (1,5 punti) Si calcoli la decomposizione primaria di Ψ.
(D) (1 punti) Si calcolino i divisori elementari di Ψ.
(E) (3 punti) Si dica se esiste un un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $\mu_{\Psi,v}(x) = x^2 + 1$, e in caso affermativo, si calcolino tutti i vettori con questa proprietà.

Soluzione:

(A) Per calcolare il polinomio caratteristico, facciamo lo sviluppo di Laplace lungo le ultime due righe

$$\chi_\Psi(x) = \det(xI_4 - M(\Psi)) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & x+1 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} =$$

$$= x(x-1)\det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 2 & x+1 \end{pmatrix} = x(x-1)(x^2+1).$$

Dalla teoria sappiamo che il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico e hanno gli stessi fattori irriducibili. Siccome i fattori irriducibili del polinomio caratteristico appaiono tutti con molteplicità uno (da notare che x^2+1 è irriducibile su $\mathbb{R}$), deduciamo che $\mu_\Phi = \chi_\Phi$.

(B) Dalla teoria sappiamo che un operatore lineare è triangolarizzabile se e solo se i fattori irriducibili del polinomio caratteristico (o equivalentemente minimo) sono tutti lineari. Siccome χ_Ψ ha il fattore irriducibile non lineare x^2+1, allora Ψ non è triangolarizzabile.

(C) La decomposizione primaria di Ψ è data da

$$\mathbb{R}^4 = V_\Psi(x) \oplus^{\text{int}} V_\Psi(x-1) \oplus^{\text{int}} V_\Psi(x^2+1) = \text{Ker}(\Psi) \oplus^{\text{int}} \text{Ker}(\Psi - \text{Id}) \oplus^{\text{int}} \text{Ker}(\Psi^2 + \text{Id}).$$

Risolvendo gli opportuni sistemi lineari, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*):

$$\text{Ker}(\Psi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\text{Ker}(\Psi - \text{Id}) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\text{Ker}(\Psi^2 + \text{Id}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(D) Dalla teoria sappiamo che

$$\chi_\Psi(x) = \prod_{f(x) \in \text{DivElem}(\Psi)} f(x),$$
$$\mu_\Psi(x) = \text{mcm}\{f(x) \ : \ f(x) \in \text{DivElem}(\Psi)\}.$$

Siccome abbiamo calcolato che $\chi_\Psi(x) = \mu_\Psi(x) = x(x-1)(x^2+1)$, ne deduciamo che i divisori elementari di Ψ sono

$$\text{DivElem}(\Psi) = \{x, x+1, x^2+1\}.$$

(E) Dalla teoria sappiamo che $\mu_{\Psi_{|V_\Psi(x^2+1)}}(x) = x^2+1$, e dunque ogni vettore v di $V_\Psi(x^2+1)$ sarà tale che $\mu_{\Psi,v}(x) | x^2+1$. Inoltre, siccome $\mu_{\Psi,v} = 1$ se e solo se $v = 0$, ne deduciamo che ogni vettore $0 \neq v \in V_\Psi(x^2+1)$ è tale che $\mu_{\Psi,v}(x) = x^2+1$.

Viceversa, se $v \in \mathbb{R}^4$ è tale che $\mu_{\Psi,v}(x) = x^2+1$ allora dalla teoria sappiamo che $\mu_{\Psi_{|\langle\Psi,v\rangle}}(x) = x^2+1$. Questo è equivalente a dire che $\Psi^2 + \mathrm{Id}$ è identicamente nullo su $\langle\Psi, v\rangle$, e questo implica che $\langle\Psi, v\rangle \subseteq V_\Psi(x^2+1)$.

Ricapitolando, abbiamo che

$$\mu_{\Psi,v}(x) = x^2+1 \Leftrightarrow 0 \neq v \in V_\Psi(x^2+1).$$

ESERCIZIO 3 (6 punti)
Si consideri l'operatore lineare $\Pi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ la cui matrice canonica è data da

$$M(\Pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(A) (1 punti) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di Π.
(B) (2,5 punti) Si calcolino gli autovalori di Φ e, per ciascuno di essi, si determinino gli autospazi generalizzati corrispondenti.
(C) (2,5 punti) Si dica se Π è diagonalizzabile e, in caso positivo, si calcoli una base diagonalizzante.

Soluzione:

(A) Siccome la matrice canonica di Π è la stessa della matrice canonica dell'operatore Ψ dell'Esercizio 2, abbiamo che

$$\chi_\Pi(x) = \chi_\Psi(x) = x(x-1)(x^2+1).$$

Siccome $\chi_\Pi(x) \in \mathbb{C}[x]$, abbiamo la fattorizzazione in irriducibili

$$\chi_\Pi(x) = x(x-1)(x-i)(x+i).$$

Dalla teoria sappiamo che il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico e hanno gli stessi fattori irriducibili. Siccome i fattori irriducibili del polinomio caratteristico appaiono tutti con molteplicità uno, deduciamo che $\mu_\Pi = \chi_\Pi$.

(B) Gli autovalori di Π sono le radici del suo polinomio caratteristico, e dunque sono $\{0, 1, i, -i\}$. Siccome ciascun autovalore ha molteplicità uno sia nel polinomio caratteristico che in quello minimo, allora dalla teoria sappiamo che per ogni $\lambda = 0, 1, i, -i$ abbiamo

$$\mathcal{E}_\lambda(\Pi) = \mathcal{E}_0^\infty(\Pi) \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{E}_\lambda^1(\Pi) = 1.$$

Dal punto (C) dell'esercizio precedente sappiamo che

$$\mathcal{E}_0(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_1(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Risolvendo gli opportuni sistemi lineari, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*):

$$\mathcal{E}_i(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_{-i}(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(C) Dalla teoria sappiamo che Π è diagonalizzabile in quanto il suo polinomio minimo è prodotto di fattori lineari distinti. Una base diagonalizzante si ottiene mettendo insieme una base per ciascun autospazio relativo a ciascun autovalore. Dunque possiamo considerare la base ordinata di $\mathbb{C}^4$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

rispetto a cui la matrice di Π è uguale a

$$M_{\mathcal{B}}(\Pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 4 (8 punti)

Si consideri la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ e la base canonica $\{f_1, f_2, f_3\}$ di $\mathbb{Q}^3$. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{Q}^4 &\longrightarrow \mathbb{Q}^3, \\ e_1 &\mapsto f_1 - f_2 + 2f_3, \\ e_2 &\mapsto -f_1 + f_2 + f_3, \\ e_3 &\mapsto 2f_1 - 2f_2 + f_3, \\ e_4 &\mapsto -3f_1 + 3f_2. \end{aligned}$$

Usando le identificazioni $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$ e $(\mathbb{Q}^3)^* \cong \mathbb{Q}^3$ (viste a lezione), si consideri l'applicazione duale $\Theta^* \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^4)$.

(A) (2 punti) Si calcoli $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}(\Theta))$ in forma parametrica.
(B) (2 punti) Si calcoli $\mathrm{Ann}(\mathrm{Im}(\Theta))$ in forma cartesiana.
(C) (2 punti) Si calcoli $\mathrm{Ker}(\Theta^*)$ in forma parametrica.
(D) (2 punti) Si calcoli $\mathrm{Im}(\Theta^*)$ in forma cartesiana.

Soluzione:

La matrice di Θ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ del dominio e $\mathcal{F}$ del codominio è

$$A := M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\Theta) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalla teoria sappiamo che, usando le identificazioni canoniche $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$ e $(\mathbb{Q}^3)^* \cong \mathbb{Q}^3$, abbiamo che

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\Theta^*) = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\Theta)^t = A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(A) Dalla teoria sappiamo che

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}(\Theta)) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Sol}_A) = \mathrm{Span}_{A^t} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che la seconda colonna di A^t è proporzionale alla prima colonna di A^t. Osserviamo anche che la prima e l'ultima colonna di A^t sono linearmente indipendenti, e quindi $\mathrm{rg}(A^t) = \mathrm{rg}(A) = 2$.

(B) Dalla teoria sappiamo che

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Im}\,\Theta) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Span}_A) = \mathrm{Sol}_{A^t}\,.$$

Dunque le equazioni cartesiane per $\mathrm{Ann}(\mathrm{Im}\,\Theta)$ sono date da:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ -x + y + z = 0, \\ 2x - 2y + z = 0, \\ -3x + 3y = 0. \end{cases}$$

(C) Abbiamo che $\mathrm{Ker}(\Theta^*) = \mathrm{Sol}_{A^t}$. Siccome A^t ha rango 2 per quanto osservata in (A), sappiamo dal teorema di rango-nullità che $\dim \mathrm{Sol}_{A^t} = 1$. Siccome la secondo colonna di A^t è l'opposto della prima riga di A^t, allora abbiamo che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a Sol_{A^t}. Dunque concludiamo che:

$$\mathrm{Sol}_{A^t} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(D) Per quanto osservato in (A), abbiamo che

$$\mathrm{Im}(\Theta^*) = \mathrm{Span}_{A^t} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Un'equazione generica $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X - 2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0$ si annulla su Span_{A^t} se e solo se

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 - 3\lambda_4 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Due soluzioni linearmente indipendenti di tale sistema sono

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dunque delle equazioni cartesiane per $\mathrm{Im}(\Theta^*)$ sono date da

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 + X_4 = 0, \\ -X_1 + X_2 + X_3 = 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5 (8 punti)

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ un operatore ciclico. Dimostrare che Φ è indecomponibile se e solo se μ_Φ è una potenza di un polinomio irriducibile.

[Suggerimento: usare la decomposizione primaria e la struttura dei sottospazi Φ-invarianti per Φ ciclico.]

Soluzione:

$\Rightarrow$: dimostriamo la contronominale. Se μ_Φ ha almeno due fattori irriducibili distinti nella sua decomposizione, allora la decomposizione primaria di V rispetto a Φ consisterà di almeno due sottospazi Φ-invarianti e dunque Φ sarà decomponibile.

$\Leftarrow$: dimostriamo la contronominale. Supponiamo che Φ sia decomponibile, cioè esiste una decomposizione non banale di V in somma diretta di sottospazi Φ-invarianti

$$V = V_1 \oplus^{\text{int}} V_2. \tag{0.1}$$

Siccome Φ è ciclico, sappiamo dalla teoria che $\Phi_{|V_i}$ è anche ciclico e abbiamo che

$$\begin{aligned} \chi_\Phi &= \mu_\Phi, \\ \chi_{\Phi_{|V_i}} &= \mu_{\Phi_{|V_i}} \text{ per } i = 1, 2. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Inoltre, usando la decomposizione (0.1), sappiamo dalla teoria che

$$\begin{aligned} \chi_\Phi &= \chi_{\Phi_{|V_1}} \cdot \chi_{\Phi_{|V_2}}, \\ \mu_\Phi &= \text{mcm}(\mu_{\Phi_{|V_1}}, \mu_{\Phi_{|V_2}}). \end{aligned} \tag{0.3}$$

Mettendo insieme (0.2) e (0.3), deduciamo che

$$\begin{aligned} \mu_\Phi &= \mu_{\Phi_{|V_1}} \cdot \mu_{\Phi_{|V_2}}, \\ \text{mcd}&(\mu_{\Phi_{|V_1}}, \mu_{\Phi_{|V_2}}) = 1. \end{aligned} \tag{0.4}$$

Siccome la decomposizione in (0.1) è non banale, allora $\mu_{\Phi_{|V_i}}$ è non constante per ogni $i = 1, 2$. Questo, insieme a (0.4), implica che $\mu_\Phi(x)$ ha almeno due fattori irriducibili distinti, come volevasi mostrare.