FOGLIO DI ESERCIZI 10: DECOMPOSIZIONE PRIMARIA E AUTOVALORI

ESERCIZIO 1 (parzialmente svolto a lezione...repetita iuvant!)

Sia $J_{\underline{m}}(\lambda) := \mathrm{diag}(J_{m_1}(\lambda), \ldots, J_{m_r}(\lambda))$ il *multiblocco di Jordan* di autovalore $\lambda \in F$ e partizione $\underline{m} = \{m_1 \geq \ldots \geq m_r \geq 1\}$.

(i) Dimostrare che il polinomio caratteristico di $J_{\underline{m}}(\lambda)$ è $\chi_{J_m(\lambda)}(x) = (x-\lambda)^{|\underline{m}|}$, dove $|\underline{m}| := \sum_i m_i$. In particolare, λ é l'unico autovalore di $J_{\underline{m}}(\lambda)$.

(ii) Dimostrare che il polinomio minimo di $J_{\underline{m}}(\lambda)$ è $\mu_{J_m(\lambda)}(x) = (x-\lambda)^{m_1}$.

(iii) Consideriamo lo spazio vettoriale numerico $F^{|\underline{m}|}$ e denotiamo gli elementi della base canonica nel seguente modo:

$$\{e_1^1, \ldots, e_{m_1}^1, e_1^2, \ldots, e_{m_2}^2, \ldots, e_1^r, \ldots, e_{m_r}^r\}.$$

Dimostrare che per ogni $k \geq 1$, gli autospazi di indice k relativi all'autovalore λ sono dati da

$$\mathcal{E}_\lambda^k(J_{\underline{m}}(\lambda)) = \bigoplus_{i=1}^r \langle e_{m_i - \min\{k, m_i\}+1}^i, \ldots, e_{m_i}^i \rangle$$

In particolare, abbiamo che

$$\dim \mathcal{E}_\lambda^k(J_{\underline{m}}(\lambda)) = \sum_{i=1}^r \min\{k, m_i\}.$$

ESERCIZIO 2

Per ciascuna matrice $A_i \in M_4(\mathbb{C})$ dell'Esercizio 4 del Foglio di Esercizi 9, si consideri l'operatore associato $\Phi_i := \Phi_{A_i} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$.

Per ciascun Φ_i:

(i) Determinare la decomposizione primaria di $\mathbb{C}^4$ rispetto a Φ_i.

(ii) Per ciascun autovalore di Φ_i, calcolare gli autospazi generalizzati corrispondenti.

ESERCIZIO 3

Per ciascuna matrice $B_i \in M_4(\mathbb{Q})$ dell'Esercizio 5 del Foglio di Esercizi 9, si consideri l'operatore associato $\Psi_i := \Phi_{B_i} \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^4)$.

Per ciascun Ψ_i:

(i) Determinare la decomposizione primaria di $\mathbb{Q}^4$ rispetto a Ψ_i.

(ii) Per ciascun autovalore di Ψ_i, calcolare gli autospazi generalizzati corrispondenti.

ESERCIZIO 4

Per ciascuna matrice $C_i \in M_4(\mathbb{R})$ dell'Esercizio 6 del Foglio di Esercizi 9, si consideri l'operatore associato $\Pi_i := \Phi_{C_i} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$.

Per ciascun Π_i:

(i) Determinare la decomposizione primaria di $\mathbb{R}^4$ rispetto a Π_i.

(ii) Per ciascun autovalore di Π_i, calcolare gli autospazi generalizzati corrispondenti.

ESERCIZIO 5

Per ciascuna matrice $C_i \in M_4(\mathbb{C})$ dell'Esercizio 7 del Foglio di Esercizi 9, si consideri l'operatore associato $\Lambda_i := \Phi_{C_i} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$.

Per ciascun Λ_i:

(i) Determinare la decomposizione primaria di $\mathbb{C}^4$ rispetto a Λ_i.

(ii) Per ciascun autovalore di Λ_i, calcolare gli autospazi generalizzati corrispondenti.

ESERCIZIO 6

Siano λ, μ, ν tre elementi (non necessariamente a due a due distinti) di un campo F e si consideri l'operatore $\Phi \in \mathrm{End}(F^2)$ la cui matrice canonica é

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che:

(1) Il polinomio caratteristico di Φ é:

$$\chi_\Phi(x) = (x-\lambda)(x-\mu).$$

(2) Il polinomio minimo di Φ é uguale a:

$$\mu_\Phi(x) = \begin{cases} (x-\lambda)(x-\mu) & \text{se } \lambda \neq \mu \text{ oppure } \nu \neq 0, \\ (x-\lambda) & \text{se } \lambda = \mu \text{ e } \nu = 0. \end{cases}$$

(3) Il sottospazio Φ-invariante $\langle e_1 \rangle$ non ha un complementare Φ-invariante se e solo $\mu = \lambda$ e $\nu \neq 0$.

(4) Se $\lambda \neq \mu$ allora

$$\mathcal{E}_\lambda(\Phi) = \mathcal{E}_\lambda^\infty(\Phi) = \langle e_1 \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_\mu(\Phi) = \mathcal{E}_\mu^\infty(\Phi) = \langle \nu e_1 + (\mu-\lambda)e_2 \rangle.$$

(5) Se $\lambda = \mu$ e $\nu = 0$ allora

$$\mathcal{E}_\lambda(\Phi) = \mathcal{E}_\lambda^\infty(\Phi) = F^2.$$

(6) Se $\lambda = \mu$ e $\nu \neq 0$ allora

$$\mathcal{E}_\lambda(\Phi) = \langle e_1 \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_\lambda^2(\Phi) = \mathcal{E}_\lambda^\infty(\Phi) = F^2.$$

ESERCIZIO 7 (NUOVO)

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ e sia $\mu_\Phi(x) = p_1(x)^{e_i} \dots p_r(x)^{e_r}$ la fattorizzazione del suo polinomio minimo in irriducibili. Si consideri la decomposizione primaria di V rispetto a Φ:

$$V = V_\Phi(p_1) \oplus^{\text{int}} \dots \oplus^{\text{int}} V_\Phi(p_r).$$

Sia $U \leq V$ un sottospazio Φ-invariante. Si mostri che

$$U = (U \cap V_\Phi(p_1)) \oplus^{\text{int}} \dots \oplus^{\text{int}} (U \cap V_\Phi(p_r)).$$

ESERCIZIO 8 (NUOVO)

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ e sia $v \neq 0$ un autovettore di Φ con autovalore $\lambda \in F$. Dimostare che:

(i) Se Φ è invertibile, allora v è un autovettore di Φ relativo a λ^{-1}.

(ii) Per ogni polinomio $p(x) \in F[x]$, v è un autovettore di $p(\Phi)$ relativo a $p(\lambda)$.

ESERCIZIO 9 (NUOVO)

Sia $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ e siano $\{v_1, \dots, v_k\}$ autovettori di Φ rispetto ad autovalori $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ a due a due distinti. Dimostrare che $\{v_1, \dots, v_k\}$ sono linearmente indipendenti.