FOGLIO DI ESERCIZI 2: INSIEMI GENERATORI, LINEARMENTE INDIPENDENTI E BASI

ESERCIZIO 1
Sia V un F-spazio vettoriale e sia $v \in V$.

(i) Mostrare che v è linearmente indipendente se e solo se $v \neq 0$.
(ii) Mostrare che $\langle v \rangle = \langle \lambda \cdot v \rangle$ per ogni $\lambda \in F^*$.

ESERCIZIO 2
Sia V un F-spazio vettoriale e siano u, v due vettori di V.

(i) Mostrare che $\{u, v\}$ sono linearmente dipendente se e solo se $v = \lambda \cdot u$ per qualche $\lambda \in F$ oppure $u = \lambda \cdot v$ per qualche $\lambda \in eF$.
(ii) Mostrare che $\{u, v\}$ sono linearmente indipendente se e solo se u e v sono non nulli e non paralleli (cioè non esiste nessun $\lambda \in F^*$ tale che $u = \lambda v$).
(iii) Mostrare che $\langle u, v \rangle = \langle \lambda \cdot u, \mu \cdot v + \nu \cdot u \rangle$ per ogni $\lambda, \mu \in F^*$ e $\nu \in F$.

ESERCIZIO 3
Sia $C = \{v_i \ : i \in I\}$ una collezione di vettori in uno spazio vettoriale V. Dimostrare che C è linearmente indipendente se e solo se ogni sottoinsieme finito di C è linearmente indipendente.

ESERCIZIO 4
Si consideri una collezione finita $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di vettori in uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $\dim\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \leq n$ e vale l'uguale se e solo se i vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 5
Si consideri due collezioni finite $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ di vettori in uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ sono linearmente indipendenti e $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \cap \langle w_1, \ldots, w_m \rangle = (0)$.

ESERCIZIO 6
Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una collezione di vettori in un F-spazio vettoriale V e sia $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset F^*$ una collezione di scalari non nulli. Dimostrare:

(1) $\{\lambda_1 \cdot v_1, \ldots, \lambda_n \cdot v_n\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti.
(2) $\langle \lambda_1 \cdot v_1, \ldots, \lambda_n \cdot v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

ESERCIZIO 7
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Dimostrare che esistono n-sottospazi $\{U_1, \ldots, U_n\}$ di V di dimensione uno tale che

$$V = U_1 \oplus^{\text{int}} \ldots \oplus^{\text{int}} U_n.$$

ESERCIZIO 8
Siano $\{U_1, \ldots, U_n\}$ sottospazi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Dimostrare che

$$\dim \sum_{i=1}^{n} U_i \leq \sum_{i=1}^{n} \dim U_i,$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\sum_{i=1}^n U_i = \bigoplus_{i=1}^n U_i$.

ESERCIZIO 9

Sia V uno spazio vettoriale e sia U un suo sottospazio. Dimostrare che esiste (non unico) un sottospazio W (chiamato un complemento di U in V) tale che

$$V = U \oplus^{\text{int}} W.$$

ESERCIZIO 10*

Sia $F = \mathbb{Z}_p$ per un certo primo p e sia $V = F^n$ per un certo $n \geq 1$. Sia $1 \leq k \leq n$.

(1) Mostrare che il numero di k-tuple di vettori linearmente indipendenti $\{v_1, \ldots, v_k\}$ in V è uguale a

$$\prod_{h=0}^{k-1}(p^n - p^h).$$

(2) Si fissi un sottospazio vettoriale W di dimensione k. Mostrare che il numero di k-tuple di vettori linearmente indipendenti $\{v_1, \ldots, v_k\}$ in W è uguale a

$$\prod_{h=0}^{k-1}(p^k - p^h).$$

(3) Dedurre, usando i punti precedenti, che il numero di sottospazi di V di dimensione k è uguale al *coefficiente Gaussiano*

$$\binom{n}{k}_p := \frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\ldots(p-1)}{(p^k-1)(p^{k-1}-1)\ldots(p-1)(p^{n-k}-1)(p^{n-k-1}-1)\ldots(p-1)}.$$

ESERCIZIO 11*

Sia V uno spazio vettoriale di dimension finita sopra un campo infinito F. Siano $S_1, \ldots, S_m$ sottospazi di V della stessa dimensione. Dimostrare che esiste un sottospazio $T \leq V$ tale che

$$V = S_i \oplus^{\text{int}} T \quad \text{per ogni } 1 \leq i \leq m.$$

[Suggerimento: si usi il fatto (dimostrato nel Foglio 1 di Esercizi) che V non è l'unione di un numero finito di sottospazi propri.]

ESERCIZIO 12

Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una collezione di vettori in un F-spazio vettoriale V e siano $\lambda_{i,j} \in F$ per ogni $1 \leq i \leq j \leq n$ tale che $\lambda_{i,i} \neq 0$. Si considerino i vettori $\{w_1, \ldots, w_n\}$ definiti da:

$$w_j = \sum_{1 \leq i \leq j} \lambda_{i,j} v_i \quad \text{per ogni } 1 \leq j \leq n.$$

[Si dice che i vettori $\{w_1, \ldots, w_n\}$ sono ottenuti dai vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ tramite una trasformazione *diagonale*.]

Dimostrare:

(1) $\langle v_1, \ldots, v_i \rangle = \langle w_1, \ldots, w_i \rangle$ per ogni $1 \leq i \leq n$. In particolare, si ha che

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle.$$

(2) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono linearmente indipendente se e solo se $\{w_1, \ldots, w_n\}$ sono linearmente indipendenti.

(3) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono una base se e solo se $\{w_1, \ldots, w_n\}$ sono una base.