FOGLIO DI ESERCIZI 5: APPLICAZIONI LINEARI (BIS)

ESERCIZIO 1

Sia $\Phi : V \rightarrow W$ un isomorfismo e sia $S \subseteq V$. Dimostrare che

- (i) S è linearmente indipendente se e solo se $\Phi(S)$ è linearmente indipendente.
- (ii) S è generante se e solo se $\Phi(S)$ è generante.
- (iii) S è una base se e solo se $\Phi(S)$ è una base.

ESERCIZIO 2

Sia $\Phi : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia $\mathcal{B}$ una base di V . Dimostrare che

- (i) Φ è iniettiva se e solo se $\Phi(\mathcal{B})$ è linearmente indipendente.
- (ii) Φ è suriettiva se e solo se $\Phi(\mathcal{B})$ è un insieme generante.
- (iii) Φ è un isomorfismo se e solo se $\Phi(\mathcal{B})$ è una base.

ESERCIZIO 3

Sia $\Phi : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e supponiamo che $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Dimostrare che:

- (i) Φ è iniettiva se e solo se $\text{rg } \Phi = m$.
- (ii) Φ è suriettiva se e solo se $\text{null } \Phi = n - m$.

ESERCIZIO 4

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dimostrare che, dati due dei seguenti oggetti

- (i) una matrice $A \in M_n(F)$ invertibile;
- (ii) una base ordinata $\mathcal{B}$ di V ;
- (iii) una base ordinata $\mathcal{C}$ di V ;

il terzo è univocamente determinato dall'equazione

$$A = M_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}.$$

ESERCIZIO 5 (Somma diretta di endomorfismi)

- (i) Sia $\Phi_i \in \text{End}(V_i)$ per $i = 1, 2$. Dimostrare che la mappa (chiamata *somma diretta di applicazioni lineari*)

$$\begin{aligned} \Phi_1 \oplus \Phi_2 : V_1 \oplus^{\text{est}} V_2 &\longrightarrow V_1 \oplus^{\text{est}} V_2 \\ (v_1, v_2) &\mapsto (\Phi_1(v_1), \Phi_2(v_2)) \end{aligned}$$

è un endomorfismo lineare di $V_1 \oplus^{\text{est}} V_2$.

- (ii) Sia $V = S \oplus^{\text{int}} T$ e sia $\Phi \in \text{End}(V)$ tale che $\Phi(S) \subseteq S$ e $\Phi(T) \subseteq T$.
 - (a) Dimostrare che $\Phi|_S \in \text{End}(S)$ e $\Phi|_T \in \text{End}(T)$.
 - (b) Si consideri l'isomorfismo lineare

$$\begin{aligned} f : S \oplus^{\text{est}} T &\xrightarrow{\cong} V, \\ (s, t) &\mapsto s + t. \end{aligned}$$

Dimostrare che $\Phi|_S \oplus \Phi|_T = f^{-1} \circ \Phi \circ f$.

ESERCIZIO 6 (Proiezioni)

Data una decomposizione $V = S \oplus^{\text{int}} T$, si consideri l'operatore lineare (chiamato *proiezione su S lungo T*)

$$\begin{aligned} \rho_{S,T} : V = S \oplus^{\text{int}} T &\longrightarrow V, \\ v = s + t &\mapsto s. \end{aligned}$$

Dimostrare che:

- (i) $\text{Im } \rho_{S,T} = S$ e $\text{ker } \rho_{T,S} = T$.
- (ii)

$$\begin{cases} \rho_{S,T} + \rho_{T,S} = \text{id}_V, \\ \rho_{S,T} \circ \rho_{T,S} = 0 = \rho_{T,S} \circ \rho_{S,T}, \\ \rho_{S,T}^2 = \rho_{S,T} \quad \text{e} \quad \rho_{T,S}^2 = \rho_{T,S}. \end{cases}$$

- (iii) Un operatore $\Phi \in \text{End}(V)$ è tale che $\Phi(S) \subseteq S$ e $\Phi(T) \subseteq T$ se e solo se Φ commuta con $\rho_{T,S}$ (oppure con $\rho_{S,T}$).

ESERCIZIO 7 (Operatori idempotenti)

Sia $\rho \in \text{End}(V)$ tale che $\rho^2 = \rho$ (un tale operatore si dice *idempotente*).

- (i) Dimostrare che $\tau := \text{id}_V - \rho$ è un operatore idempotente tale che $\rho \circ \tau = 0 = \tau \circ \rho$.
- (ii) Dimostrare che $\text{Im}(\rho) = \text{ker}(\tau)$ e $\text{ker}(\rho) = \text{Im}(\tau)$.
- (iii) Dimostrare che $V = S \oplus^{\text{int}} T$ dove $S = \text{Im}(\rho) = \text{ker}(\tau)$ e $T = \text{ker}(\rho) = \text{Im}(\tau)$.
- (iv) Dimostrare che $\rho = \rho_{S,T}$ e che $\tau = \rho_{T,S}$.

ESERCIZIO 8 (Risoluzioni dell'identità)

Due operatori idempotenti ρ e τ si dicono *ortogonali*, denotato con $\rho \perp \tau$, se $\rho \circ \tau = 0 = \tau \circ \rho$. Una *risoluzione dell'identità* per V è una scrittura della forma

$$\text{id}_V = \rho_1 + \dots + \rho_n,$$

con $\{\rho_i\}$ sono operatori idempotenti a due a due ortogonali.

- (i) Sia $\text{id}_V = \rho_1 + \dots + \rho_n$ una risoluzione dell'identità per V . Dimostrare che si ha una decomposizione

$$V = \text{Im}(\rho_1) \oplus^{\text{int}} \dots \oplus^{\text{int}} \text{Im}(\rho_n),$$

e che ρ_i è la proiezione su $\text{Im}(\rho_i)$ lungo il sottospazio $\bigoplus_{j \neq i}^{\text{int}} \text{Im}(\rho_j)$.

- (ii) Data una decomposizione $V = V_1 \oplus^{\text{int}} \dots \oplus^{\text{int}} V_n$, sia ρ_i la proiezione su V_i lungo il sottospazio $\bigoplus_{j \neq i}^{\text{int}} V_j$. Dimostrare che

$$\text{id}_V = \rho_1 + \dots + \rho_n$$

è una risoluzione dell'identità.

ESERCIZIO 9

Siano V e W due F -spazi vettoriali di dimensioni tale che V ha dimensione finita. Siano $K \leq V$ e $I \leq W$ due sottospazi tali che $\dim K + \dim I = \dim V$. Si mostri che esiste un'applicazione lineare $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$ tale che $\text{ker}(\Phi) = K$ e $\text{Im}(\Phi) = I$.

ESERCIZIO 10

Siano V e W due F -spazi vettoriali.

- (i) Dimostrare che esiste un'applicazione lineare iniettiva $\Phi : V \hookrightarrow W$ se e solo se $\dim V \leq \dim W$.
- (ii) Dimostrare che esiste un'applicazione lineare suriettiva $\Phi : V \twoheadrightarrow W$ se e solo se $\dim V \geq \dim W$.

ESERCIZIO 11

Siano $A \in M_{m,n}(F)$ e si consideri lo spazio delle soluzioni $\text{Sol}_A \leq F^n$ del sistema lineare omogeneo Sis_A con matrice A . Dimostrare che

$$\dim \text{Sol}_A \geq n - m.$$

ESERCIZIO 12

Sia $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$ e sia $C \subset V$. Dimostrare che:

- (i) Se Φ è iniettiva e C è linearmente indipendente, allora $\Phi(C)$ è linearmente indipendente.
- (ii) Se Φ è suriettiva e C è generante, allora $\Phi(C)$ è generante.

ESERCIZIO 13

Sia $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$ e sia $C \subset V$. Dimostrare che:

- (i) Se $\Phi(C)$ è linearmente indipendente allora C è linearmente indipendente.
- (ii) Se $\Phi(C)$ è linearmente indipendente e C genera V , allora Φ è iniettiva.

ESERCIZIO 14

Sia $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$. Dimostrare che:

- (i) Φ è iniettiva se e solo se esiste $\Psi \in \text{Hom}(W, V)$ tale che $\Psi \circ \Phi = \text{id}_V$.
- (ii) Φ è suriettiva se e solo se esiste $\Psi \in \text{Hom}(W, V)$ tale che $\Phi \circ \Psi = \text{id}_W$.

ESERCIZIO 15

Sia V un F -spazio vettoriale di dimensione finita. Siano $\Phi, \Psi \in \text{End}(V)$. Dimostrare che:

- (i) $\Phi \circ \Psi = \text{id}_V$ se e solo se $\Psi \circ \Phi = \text{id}_V$.
- (ii) Se $\Phi \circ \Psi$ è invertibile, allora anche Φ e Ψ sono invertibili.

ESERCIZIO 16

Sia $A \in M_{m,n}(F)$ una matrice di rango k . Dimostrare che esistono due matrici $X \in M_{m,k}(F)$ e $Y \in M_{k,n}(F)$, entrambi di rango k , tale che $A = X \cdot Y$.

ESERCIZIO 17

Sia V un F -spazio vettoriale di dimensione finita. Siano $\Phi, \Psi \in \text{End}(V)$. Dimostrare che:

- (i) Esiste $\Theta \in \text{End}(V)$ tale che $\Phi = \Psi \circ \Theta$ se e solo se $\text{Im}(\Phi) \subseteq \text{Im}(\Psi)$.
- (ii) Esiste $\Theta \in \text{End}(V)$ tale che $\Phi = \Theta \circ \Psi$ se e solo se $\ker(\Psi) \subseteq \ker(\Phi)$.

ESERCIZIO 18

Siano V e W due F -spazi vettoriali di dimensione n e m rispettivamente. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ordinata di V e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base ordinata di W . Si considerino le applicazioni lineari $\{\Phi_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ definite da

$$\Phi_{ij}(v_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j, \\ w_i & \text{se } k = j. \end{cases}$$

Dimostrare che $\{\Phi_{ij}\}$ formano una base di $\text{Hom}(V, W)$.

ESERCIZIO 19

Sia V un F -spazio vettoriale di dimensione finita. Dimostrare che:

- (i) Se $\Phi, \Psi \in \text{End}(V)$ sono tali che $\Phi \circ \Psi = 0$ allora $\text{rg}(\Phi) + \text{rg}(\Psi) \leq n$.
- (ii) Per ogni $\Phi \in \text{End}(V)$ esiste $\Psi \in \text{End}(V)$ tale che $\Phi \circ \Psi = 0$ e $\text{rg}(\Phi) + \text{rg}(\Psi) \leq n$.
- (iii) Per ogni $\Psi \in \text{End}(V)$ esiste $\Phi \in \text{End}(V)$ tale che $\Phi \circ \Psi = 0$ e $\text{rg}(\Phi) + \text{rg}(\Psi) \leq n$.

(iv) Dare un esempio di due operatori $\Phi, \Psi \in \text{End}(V)$ tali che $\Phi \circ \Psi = 0$ ma $\Psi \circ \Phi \neq 0$.

ESERCIZIO 20 (NUOVO)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dimostrare che, dati due dei seguenti oggetti

- (i) una matrice $A \in M_n(F)$ invertibile;
- (ii) una base ordinata $\mathcal{B}$ di V ;
- (iii) un automorfismo $\Theta : V \rightarrow V$;

il terzo è univocamente determinato dall'equazione

$$A = M_{\mathcal{B}}(\Theta).$$

ESERCIZIO 21 (NUOVO)

Siano V e W due F -spazi vettoriali e sia $S \leq V$ un sottospazio. Dimostrare che ogni applicazione lineare $\Phi : S \rightarrow W$ si estende ad un'applicazione lineare $\bar{\Phi} : V \rightarrow W$.

ESERCIZIO 22 (NUOVO)

Sia $\Phi : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Dimostrare che esiste un sottospazio $S \leq V$ tale che:

- (i) $S \cap \ker(\Phi) = \{0\}$;
- (ii) $\Phi(S) = \text{Im}(\Phi)$.

ESERCIZIO 23 (NUOVO)

Siano V e W due F -spazi vettoriali di dimensione finita e siano $S \leq V$ e $T \leq W$ due sottospazi vettoriali. Dimostrare che:

- (i) esiste un'applicazione lineare $\Phi : V \rightarrow W$ tale che $\ker(\Phi) = S$ se e solo se $\dim S \geq \dim V - \dim W$.
- (ii) esiste un'applicazione lineare $\Phi : V \rightarrow W$ tale che $\text{Im}(\Phi) = T$ se e solo se $\dim T \leq \dim V$.