FOGLIO DI ESERCIZI 6: QUOZIENTI, DUALI E TEOREMI DI ISOMORFISMO

ESERCIZIO 1

Data un'applicazione lineare $\Phi : V \to W$, il *conucleo* di Φ è

$$\operatorname{coker}(\Phi) := W/\operatorname{Im}(\Phi).$$

Dimostrare che se V e W hanno dimensione finita, allora

$$\dim V + \dim \operatorname{coker}(\Phi) = \dim \ker(\Phi) + \dim W.$$

In particolare, se $\dim V = \dim W < \infty$, allora

$$\dim \operatorname{coker}(\Phi) = \dim \ker(\Phi). \tag{0.1}$$

ESERCIZIO 2

Sia F un campo e sia $F^{\mathbb{N}}$ lo spazio vettoriale su F di tutte le successioni $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in F\}$ a valori in F. Si considerino gli operatori di traslazione a sinistra $\mathbb{S}$ e a destra $\mathbb{D}$ cosi definiti:

$$\mathbb{S}((a_0, a_1, a_2, \ldots)) = (a_1, a_2, \ldots) \quad \text{e} \quad \mathbb{D}((a_0, a_1, a_2, \ldots)) = (0, a_0, a_1, a_2, \ldots).$$

Per ogni $k \geq 1$ si considerino gli iterati $\mathbb{S}^k$ e $\mathbb{D}^k$ ottenuti componendo, rispettivamente, $\mathbb{S}$ e $\mathbb{D}$ con se stessi k volte.

(A) Si dimostri che $\dim \operatorname{coker}(\mathbb{S}^k) = 0$ e $\dim \ker(\mathbb{S}^k) = k$. Dunque formula (0.1) non vale in questo caso.

(B) Si dimostri che $\dim \operatorname{coker}(\mathbb{D}^k) = k$ e $\dim \ker(\mathbb{D}^k) = 0$. Dunque formula (0.1) non vale in questo caso.

ESERCIZIO 3

Sia F un campo tale che $1 \neq -1$ e sia $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Una matrice $A \in M_n(F)$ si dice *simmetrica* (risp. *antisimmetrica*) se $A^t = A$ (risp. $A^t = -A$).

(A) Mostrare che l'insieme delle matrici simmetriche di formato $n \times n$, denotato con $M_n^s(F)$, forma un sottospazio vettoriale di $M_n(F)$. Calcolarne la dimensione e trovare una base.

(B) Mostrare che l'insieme delle matrici antisimmetriche di formato $n \times n$, denotato con $M_n^a(F)$, forma un sottospazio vettoriale di $M_n(F)$. Calcolarne la dimensione e trovare una base.

(C) Mostrare che

$$M_n(F) = M_n^s(F) \oplus^{\text{int}} M_n^a(F).$$

ESERCIZIO 4

Sia S un sottospazio di un F-spazio vettoriale V. Dimostrare che un sottoinsieme $X \subset V$ è un classe laterale rispetto a S se e solo se per ogni $x_0 \in X$ vale che (resp. esiste un $x_0 \in X$ tale che):

$$X = \{v - x_0 \,:\, v \in S\}.$$

ESERCIZIO 5

Sia $\Phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Dimostrare che per ogni $w \in \operatorname{Im}\Phi$, la sua immagine inversa $\Phi^{-1}(w)$ è una classe laterale rispetto a $\ker(\Phi)$.

ESERCIZIO 6

Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq n-1}$ per un certo $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri il funzionale lineare

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a : \mathbb{R}[X]_{\leq n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ p(X) &\mapsto p(a). \end{aligned}$$

Si denoti con $\mathbb{D}$ l'operatore di $\mathbb{R}[X]$ di derivazione $\mathbb{D}(p(X)) := p'(X)$.

(A) Si fissi un numero $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\mathcal{B} := \left\{ p_k(X) := \frac{(X-a)^k}{k!} \right\}_{0 \leq k \leq n-1}$$

è un base di V con base duale

$$\mathcal{B}^* := \{\mathbb{E}_a \circ \mathbb{D}^k\}_{0 \leq k \leq n-1}$$

(B) Siano $a_1, \ldots, a_n$ numeri reali a due a due distinti. Dimostrare che

$$\mathcal{C} := \left\{ q_k(X) := \prod_{j \neq k} \frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right\}_{1 \leq k \leq n}$$

è un base di V con base duale

$$\mathcal{C}^* = \{\mathbb{E}_{a_1}, \ldots, \mathbb{E}_{a_n}\}$$

(C) Dimostrare le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(X) &= p(1/2) && \text{per ogni } p(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 0}, \\ \int_0^1 p(X) &= \frac{1}{2}p(0) + \frac{1}{2}p(1) && \text{per ogni } p(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 1}, \\ \int_0^1 p(X) &= \frac{1}{6}p(0) + \frac{4}{6}p(1/2) + \frac{1}{6}p(1) && \text{per ogni } p(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 2}, \\ \int_0^1 p(X) &= \frac{1}{8}p(0) + \frac{3}{8}p(1/3) + \frac{3}{8}p(2/3) + \frac{1}{8}p(1) && \text{per ogni } p(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 7 (NUOVO)

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di F^n. Consideriamo l'isomorfismo canonico

$$\begin{aligned} \Delta : F^n &\xrightarrow{\cong} (F^n)^*, \\ a &\mapsto \Delta_a : F^n \to F, \\ & \qquad v \mapsto a^t \cdot x. \end{aligned}$$

Dimostrare che $\Delta(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^*$.

ESERCIZIO 8 (NUOVO)

Sia $\{V_i\}_{i \in I}$ una collezione di F-spazi vettoriali. Dimostrare che esiste un isomorfismo canonico

$$\left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right)^* \cong \prod_{i \in I} V_i^*.$$

ESERCIZIO 9 (NUOVO)

Siano V e W due F-spazi vettoriali di dimensione finita e sia $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dimostrare che valgono le seguenti formule:

$$\begin{cases} \dim V - \dim \ker(\Phi) = \dim W - \dim \ker(\Phi^*), \\ \dim W - \dim \mathrm{coker}(\Phi) = \dim V - \dim \mathrm{coker}(\Phi^*). \end{cases}$$

ESERCIZIO 10 (NUOVO)

Sia V uno spazio vettoriale (possibilmente di dimensione infinita). Siano W_1 e W_2 due sottospazi di V. Dimostrare che:

(i) $\mathrm{Ann}^*(W_1 \cap W_2) = \mathrm{Ann}^*(W_1) + \mathrm{Ann}^*(W_2)$.

(ii) $\mathrm{Ann}^*(W_1 + W_2) = \mathrm{Ann}^*(W_1) \cap \mathrm{Ann}^*(W_2)$.

(iii) Se $V = W_1 \oplus^{\mathrm{int}} W_2$ allora $V^* = \mathrm{Ann}^*(W_1) \oplus^{\mathrm{int}} \mathrm{Ann}^*(W_2)$.