Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2018/2019

Docente: Filippo Viviani

Tutori: Alessio Rampogna e Chiara Camerini

`Tutorato 1`

`06 Marzo 2019`

1. Su $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ definiamo le seguenti operazioni:

$$(n, x) + (m, y) = (n + m, x + y)$$
$$(n, x) \cdot (m, y) = (nm, ny + mx + xy)$$

   (1) Mostrare che $(A, +, \cdot)$ è un anello.

   (2) Dire se A è unitario, commutativo, integro, un campo, un corpo.

2. Dire quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali:

   (a) $\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}$

   (b) $\{(x, y, z) : x - 7y + z = 1\}$

   (c) $\{(t, t, t) : 0 \leq t \leq 1\}$

   (d) $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 1)$

   (e) $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ dove $H_i = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = 0\}$

3. Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali costituito dai polinomi che hanno -3 come zero. Sia T il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]$ costituito dai polinomi di quarto grado.

   Verificare se S e T sono sottospazi di $\mathbb{R}[x]$.

4. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi:

$$S := \{(x, y, z, w) : x + z = 0, 3y - w = 0\}$$
$$T := \{(x, y, z, w) : x + z = 0, y + 2w = 0\}.$$

   Determinare $S \cap T$ e $S + T$.

5. Applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan, si determinino tutte le soluzioni, se esistono, dei seguenti sistemi lineari:

   (a)

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = -1 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 3x - 4y + 3z - 3t = 1 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y + 6z = 1 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} 2x - 2y + z + 4t = 0 \\ x - y - 4z + 2t = 0 \\ -x - y + 3z - 2t = 0 \\ 3x - 3y + z + 6t = 0 \end{cases}$$