Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2018/2019

Docente: Filippo Viviani

Tutori: Alessio Rampogna e Chiara Camerini

`Tutorato 2`

`13 Marzo 2019`

1. Risolvere i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ -x + y + 2z + t = 0 \\ 3y + 5z + 2t = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

2. Si consideri la seguente applicazione:

$$\phi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}_3[x]$$
$$(a, b, c) \longmapsto (a + (a + b)x + (a + b + c)x^2)$$

   Dire se ϕ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

3. Mostrare che $\{1, x, x^2\}$ è un insieme di generatori per $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (ossia lo spazio dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$). Perché, invece, l'insieme $\{x, x^2, 4x + \sqrt{\pi}x^2\}$ non lo è?

4. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Verificare se le seguenti coppie di vettori sono linearmente indipendenti:

   (a) $(1, 3)$ e $(-1, 2)$
   (b) $(5, \pi)$ e $(-15, -3\pi)$

5. Sia V uno spazio vettoriale e siano S, T due sottospazi. Dimostrare che:

$$S \cup T \text{ è un sottospazio di } V \iff S \subseteq T \text{ o } T \subseteq S$$

6. In $\mathbb{R}^3$ si considerino gli insiemi $U := \{(x, y, z) : y - z = 0\}$ e $V := \langle (1, 0, 1) \rangle$. Mostrare che: $\mathbb{R}^3 = U \oplus^{int} V$.

7. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti vettori:

$$v_1 = (1, 2, 1, 2) \qquad v_2 = (0, 0, 1, 1) \qquad v_3 = (1, 1, 1, 1) \qquad v_4 = (0, 0, 0, 1) \qquad v_5 = (1, 2, 3, 4)$$

   Si risolvano le seguenti questioni:

   (a) Dire se i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 sono linearmente indipendenti.
   (b) Dire se i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti.
   (c) Dire se i vettori v_1, v_2, v_4, v_5 sono linearmente indipendenti.
   (d) Dire se i vettori v_1, v_2, v_3, v_5 generano $\mathbb{R}^4$.

8. Sia V un $F-$spazio vettoriale e sia $v \in V$.

   (a) Mostrare che: v è linearmente dipendente $\iff$ $v = 0$.
   (b) Mostrare che: $\langle v \rangle = \langle \lambda \cdot v \rangle$ per ogni $\lambda \in F^*$