Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2018/2019

Docente: Filippo Viviani

Tutori: Alessio Rampogna e Chiara Camerini

`Tutorato 3`

`20 Marzo 2019`

1. Per ciascun sottospazio $U \leq \mathbb{Q}^4$ dato come insieme di soluzioni di un sistema lineare omogeneo qua sotto elencato, si calcoli il suo insieme di soluzioni U in $\mathbb{Q}^4$ in forma parametrica e se ne determini una sua base. [`esercizi dal foglio 3 del Prof. Viviani`]

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0 \\ -X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 - X_4 = 0 \\ 2X_1 - 3X_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0 \\ -X_1 + X_2 - X_3 = 0 \end{cases}$$

2. Per ciascun sottospazio W di $\mathbb{Q}^4$ dato di seguito in forma parametrica, si determini una base di W e lo si esprima in forma cartesiana. [`esercizi dal foglio 3 del Prof. Viviani`]

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti vettori:

$$(1,1,1,0) \quad (0,1,1,1) \quad (1,1,0,0)$$

Verificare che sono linearmente indipendenti e completare ad una base di $\mathbb{R}^4$.

4. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti insiemi. Dire quali formano una base e quali no. In quest'ultimo caso, *se possibile*, completare ad una base di $\mathbb{R}^4$:

   (a) $\{(1,0,8,9),(2,3,4,0),(2,0,1,2),(1,7,5,9)\}$

   (b) $\{(1,0,0,1),(2,3,3,2),(0,-1,-1,0)\}$

5. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi vettoriali:

$$H := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = 0, 2t = 0\}$$
$$K := \langle (1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5) \rangle$$

Si risolvano le seguenti questioni:

(a) Determinare la dimensione e una base per H e K.

(b) Determinare la dimensione e una base per $H \cap K$ e $H + K$.

(c) Il vettore $(1, 2, 3, 4)$ appartiene allo spazio $H + K$? Se sì, scriverlo come somma di un elemento di H e di un elemento di K.

6. Sia V un $F-$spazio vettoriale di dimensione finita. Sia W un sottospazio di V. Mostrare che:

$$\dim V = \dim W \iff V = W$$