Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2018/2019

Docente: Filippo Viviani

Tutori: Alessio Rampogna e Chiara Camerini

`Tutorato 4`

`27 Marzo 2019`

1. Siano U e V due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2.

   (a) Dimostrare che $U \cap V \neq \emptyset$

   (b) Determinare tutte le possibili dimensioni dell'intersezione e descrivere un esempio per ognuna di esse.

2. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi:

$$H := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z = 0, x + y - t = 0\}$$
$$K := \langle (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0) \rangle$$

   Determinare la dimensione e una base per $H + K$. Tale somma è diretta?

3. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, -1, 1) \qquad v_2 = (1, 0, 3)$$

   (a) Mostrare che $\{v_1, v_2\}$ sono linearmente indipendenti.

   (b) Completarli ad una base di $\mathbb{R}^3$ in *tre* modi diversi.

   (c) Determinare il complemento* dei seguenti sottospazi vettoriali: $\langle v_1 \rangle$, $\langle v_1, v_2 \rangle$ e $\langle v_1, v_3 \rangle$. (Con v_3 indichiamo il vettore determinato al punto precedente per completare ad una base)

   *Ricordiamo che due sottospazi vettoriali W_1, W_2 di uno spazio vettoriale V si dicono *complementari* se $W_1 + W_2 = V$.

4. Determinare due sottospazi U e V di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathbb{R}^4 = U + V$, *senza* che la somma sia diretta.

5. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i seguenti sottospazi:

$$U := \langle (-1, 2, -2) \rangle \qquad W := \langle (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, x_1 - x_3 = 0 \rangle$$

   (a) Dire se $\mathbb{R}^3 = U \bigoplus^{int} V$.

   (b) Determinare due sottospazi Z, V di $\mathbb{R}^3$ tali che:

$$\mathbb{R}^3 = U \bigoplus^{int} Z \qquad \mathbb{R}^3 = W \bigoplus^{int} V$$

6. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$W_k := \langle (0,1,0,2), (-1,1,0,1), (-1,k+1,0,k) \rangle$$

$$U_k : \begin{cases} 2x - y - kz = 0 \\ x - kz = 0 \\ x + ky = 0 \end{cases}$$

Per $k = \pm 1$ si risolvano le seguenti questioni:

(a) Determinare una base di W_k e una base di U_k.

(b) Determinare le dimensioni di $W_k + U_k$ e $W_k \cap U_k$.

(c) Provare che per $k = -1$ esiste $Z \leq \mathbb{R}^4$ tale che:

$$W_k \bigoplus^{int} Z = U_k \bigoplus^{int} Z$$

Mostrare, infine, che per $k = 1$ tale sottospazio non esiste.