Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2018/2019

Docente: Filippo Viviani

Tutori: Alessio Rampogna e Chiara Camerini

`Tutorato 5`

`03 Aprile 2019`

1. Sia $\mathbb{Q}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e $\mathbb{Q}^4$ con base canonica $\{f_1, f_2, f_3\}$. Si consideri il seguente omomorfismo lineare da $\mathbb{Q}^4$ a $\mathbb{Q}^3$: [`esercizio dal foglio 4 del Prof. Viviani`]

$$\begin{cases} \Phi(e_1) = f_1 - f_2 + f_3 \\ \Phi(e_2) = -f_1 + f_2 - f_3 \\ \Phi(e_3) = f_1 + f_2 \\ \Phi(e_4) = 2f_1 - 2f_2 + 2f_3 \end{cases}$$

   (a) Si calcoli la matrice associata a Φ nelle basi canoniche.

   (b) Il nucleo di Φ in forma cartesiana e parametrica e la sua nullità.

   (c) L'immagine di Φ in forma cartesiana e parametrica e il suo rango.

2. Sia $\mathbb{Q}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e $\mathbb{Q}^4$ con base canonica $\{f_1, f_2, f_3\}$. Si consideri il seguente omomorfismo lineare da $\mathbb{Q}^3$ a $\mathbb{Q}^4$: [`esercizio dal foglio 4 del Prof. Viviani`]

$$\begin{cases} \Psi(f_1) = e_1 - e_2 + e_4 \\ \Psi(f_2) = -e_1 + e_2 - e_4 \\ \Psi(f_3) = e_1 + e_3 - e_4 \end{cases}$$

   (a) Si calcoli la matrice associata a Ψ nelle basi canoniche.

   (b) Il nucleo di Ψ in forma cartesiana e parametrica e la sua nullità.

   (c) L'immagine di Ψ in forma cartesiana e parametrica e il suo rango.

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato rispetto alla base canonica alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare immagine e nucleo di f indicando una base per ciascuno di tali sottospazi.

   (b) Il vettore $w = (1, -4, -5)$ è un vettore dell'immagine? Se sì, determinare la sua controimmagine.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione così definita:

$$(x, y, z) \longmapsto (x + 2y + z, y + z)$$

   (a) Verificare che f è lineare.

   (b) Determinare una base del nucleo e dire se f è iniettiva.

   (c) Calcolare $f((2, 1, 3))$ e determinare $f^{-1}((2, 1, 3))$.

5. Dire se esiste un'applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

$$Ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z = 0, 2z = 0\}$$

6. Per ogni coppia di matrici calcolare, *se possibile*, il prodotto riga per colonna $A \cdot B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$