

Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2018/2019

Docente: Filippo Viviani

Tutori: Alessio Rampogna e Chiara Camerini

Tutorato 7

07 Maggio 2019

1. Data un'applicazione lineare $\Phi : V \longrightarrow W$, il *conucleo* di Φ è:

$$\text{coker}(\Phi) := W/\text{Im}(\Phi).$$

Dimostrare che se V e W hanno dimensione finita, allora:

$$\dim V + \dim \text{coker}(\Phi) = \dim \ker(\Phi) + \dim W.$$

In particolare, se $\dim V = \dim W < \infty$, allora:

$$\dim \text{coker}(\Phi) = \dim \ker(\Phi)$$

2. Siano $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e $h(x) = x^3 + x^2 \in V$. Si consideri il sottospazio $U := \langle h(x) \rangle \subset V$.

(i) Calcolare $\dim(V/U)$.

(ii) Dati $p(x) = 2x^3 - x + 3$ e $q(x) = 9x^3 + 5x^2 - 2x + 6$ in V , determinare:

$$\dim(\langle p(x), q(x) \rangle).$$

(iii) Detta $\pi : V \longrightarrow V/U$ la proiezione canonica associata al sottospazio U , indichiamo con $[p(x)] := \pi(p(x))$ e $[q(x)] := \pi(q(x))$ le classi di equivalenza dei polinomi $p(x)$ e $q(x)$. Dire se:

$$[q(x)] \in \langle [p(x)] \rangle.$$

3. Si consideri l'applicazione lineare $\Phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_4 - 2x_1, x_1).$$

Sia $W := \text{Ker}(\Phi)$, risolvere le seguenti questioni:

(i) Verificare che $\dim(\mathbb{R}^4/W) = 2$.

(ii) Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Posti

$$u_1 = -e_1 + e_2 \quad u_2 = e_1 + 2e_3$$

stabilire se in $\mathbb{R}^4/W$ si ha che:

$$[u_1] = [u_2].$$

(iii) Determinare una base per $\mathbb{R}^4/W$.

(iv) Detto $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, stabilire se

$$\pi|_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^4/W$$

è un isomorfismo.

4. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ così fissati:

$$v_1 = (1, -1, 2) \quad v_2 = (1, 2, -1) \quad v_3 = (1, -1, 1)$$

(i) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(ii) Calcolare $\mathcal{B}^*$, ovvero la base duale di $\mathcal{B}$.

(iii) Sia $f \in V^*$ definita come:

$$f((x, y, z)) = 2x - y + z$$

calcolare $[f]_{\mathcal{B}^*}$