Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

TUTORATO DI GE110

Anno Accademico 2018/2019

Docente: Filippo Viviani

Tutori: Alessio Rampogna e Chiara Camerini

`Tutorato 8`

`14 Maggio 2019`

1. Siano $U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $V = \mathbb{R}^3$. Provare che i vettori:

$$(1, 1, 1)^t + U \qquad (1, -1, 1)^t + U$$

sono linearmente dipendenti in V/U.

2. Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi (ordinati) $\mathcal{B}_i$ di $\mathbb{R}^3$:

   (a) Dimostrare che $\mathcal{B}_i$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determinare la base duale $\mathcal{B}_i^*$ in $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{B}_1 := \{(1, 0, -1)^t, (-1, -1, 1)^t, (-2, 1, -2)^t\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \{(0, 1, -1)^t, (1, -1, 1)^t, (2, -1, 2)^t\}$$

3. Si consideri il seguente sottospazio U di $\mathbb{Q}^4$ che è soluzione del sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0 \end{cases}$$

Si calcoli $\mathrm{Ann}(U) \leq \mathbb{Q}^4$ in forma cartesiana e parametrica.

4. Si consideri il seguente sottospazio W di $\mathbb{Q}^4$ dato in forma parametrica:

$$W = \langle (1, 1, -1, -2)^t, (1, -1, 0, 1)^t \rangle$$

Calcolare $\mathrm{Ann}(W) \leq \mathbb{Q}^4$ in forma cartesiana e parametrica.

5. Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\det(A^3 B^3 A^{-1} B^{-2})$.

6. Sia $A \in M_{2,2}(F)$, dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando la scelta.

   - $A + A^t$ è simmetrica.

     V F

   - Se $\det(A) = 1$ allora $\det(2A) = 2$.

     V F

- Se $\det(A) = 1$ allora $\det(AB) = \det B$ per ogni $B \in M_{2,2}$.

$\mathbb{V}$ $\mathbb{F}$

7. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Con riferimento alle matrici dell'esercizio 7, calcolare: $\det(A^2)$ e $\det(BC^t)$.