Nome candidato:

APPELLO C DEL CORSO GE110
26 GENNAIO 2021

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Si consideri l'operatore lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ univocamente determinato da

$$\begin{cases} \Phi(e_1) = e_2, \\ \Phi(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3 - e_4, \\ \Phi(e_3) = -2e_1 + 3e_2 - e_3 + e_4, \\ \Phi(e_4) = -5e_1 + 8e_2 - 4e_3 + 3e_4. \end{cases}$$

(A) Si calcoli il polinomio caratteristico di Φ.
(B) Per ciascun autovalore di Φ si determinino gli autospazi generalizzati corrispondenti.
(C) Si determini la forma canonica di Jordan di Φ e il polinomio minimo di Φ.
(D) Per ciascun $k = 1, 2, 3, 4$, determinare tutti vettori $v \in \mathbb{C}^4$ tale che $\mu_{\Phi,v}(x) = x^k$ (qualora esistano).
(E) Si determini una base di Jordan, cioè una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ tale che $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ si scrive in forma canonica di Jordan.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Si consideri l'operatore lineare $\Psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Psi)$ è uguale ad A e l'operatore lineare $\Pi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Pi)$ è uguale ad A.

(A) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di Ψ e di Π.
(B) Si calcoli la decomposizione primaria di Ψ.
(C) Per ciascun autovalore di Π, si calcolino gli autospazi generalizzati.
(D) Si dica se Ψ e Π sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, trovare delle basi diagonalizzanti.
(E) Si calcolino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $\mu_{\Psi,v}(x) = x^2 + 1$ (qualora esistano) e tutti i vettori $w \in \mathbb{C}^4$ tali che $\mu_{\Pi,w}(x) = x^2 + 1$ (qualora esistano).

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_3 - X_4 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 + X_2 - X_3 - 2X_4 = 0, \end{cases}$$

e sia V_2 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_3 + 2X_4 = 0, \end{cases}$$

(A) Determinare una base di V_1, di V_2 e di $V_1 \cap V_2$.
(B) Calcolare la dimensione di $V_1 + V_2$ usando la formula di Grassmann, e scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana.
(C) Dire se esiste un'applicazione lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^4)$ tale che $\ker \Phi = V_1$ e $\mathrm{Im}\, \Phi = V_2$, e in caso affermativo, si scriva esplicitamente una tale Φ.
(D) Usando l'identificazione canonica $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$, si calcolino $\mathrm{Ann}(V_1)$ e $\mathrm{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana.
(E) Scrivere $\mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2)$ in forma parametrica e $\mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare $\Theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^3)$ la cui matrice canonica è

$$M(\Theta) = B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(A) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(\Theta)$ e un'equazione cartesiana di $\mathrm{Im}(\Theta)$.
(B) Trovare due matrici $P \in M_3(\mathbb{Q})$ e $Q \in M_4(\mathbb{Q})$ invertibili tali che $P \cdot B \cdot Q$ è in forma canonica rispetto alla relazione di equivalenza tra matrici.
(C) Usando le identificazioni canoniche $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$ e $(\mathbb{Q}^3)^* \cong \mathbb{Q}^3$, si consideri l'applicazione duale $\Theta^* \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^4)$. Calcolare $\mathrm{Ker}(\Theta^*)$ in forma parametrica e $\mathrm{Im}(\Theta^*)$ in forma cartesiana.

ESERCIZIO 5 (8 punti)
Sia V un F-spazio vettoriale e siano $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq \widehat{V}$ (per qualche $r \geq 1$). Consideriamo l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \Phi : V &\longrightarrow F^r \\ v &\mapsto \begin{pmatrix} f_1(v) \\ \dots \\ f_r(v) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dimostrare che:
(A) Φ è suriettiva se e solo se $\{f_1, \dots, f_r\}$ è un insieme linearmente indipendente di $\widehat{V}$.
(B) Φ è iniettiva se e solo se $\{f_1, \dots, f_r\}$ è un insieme generante di $\widehat{V}$.
(C) Φ è biettiva se e solo se $\{f_1, \dots, f_r\}$ è una base di $\widehat{V}$.