Nome candidato:
Numero di matricola:

APPELLO X DEL CORSO GE110
19 SETTEMBRE 2020

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Si consideri l'operatore lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ univocamente determinato da

$$\begin{cases} \Phi(e_1) = e_2, \\ \Phi(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3 - e_4, \\ \Phi(e_3) = -e_1 + 2e_2 - 2e_3 + e_4, \\ \Phi(e_4) = -3e_1 + 6e_2 - 6e_3 + 3e_4. \end{cases}$$

(A) Dimostrare che 0 è l'unico autovalore di Φ.
(B) Si determinino gli autospazi generalizzati di Φ relativi all'autovalore 0.
(C) Si determini la forma canonica di Jordan di Φ.
(D) Si calcoli il polinomio minimo $\mu_{\Phi,v}$ di Φ rispetto al vettore

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e si determini una base del sottospazio ciclico $\langle \Phi, v \rangle$.
(E) Si determini una base di Jordan, cioè una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ tale che $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ si scrive in forma canonica di Jordan.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Si consideri l'operatore lineare $\Psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Psi)$ è uguale ad A e l'operatore lineare $\Pi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Pi)$ è uguale ad A.

(A) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di Ψ e di Π.
(B) Si calcoli la decomposizione primaria di Ψ.
(C) Per ciascun autovalore di Π, si calcolino gli autospazi generalizzati.
(D) Si dica se Ψ e Π sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, trovare delle basi diagonalizzanti.
(E) Si calcolino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $\mu_{\Psi,v}(x) = x(x-1)$ (qualora esistano) e tutti i vettori $w \in \mathbb{C}^4$ tali che $\mu_{\Pi,w}(x) = x^2 + 1$ (qualora esistano).

ESERCIZIO 3 (8 punti)

Sia V_1 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_3 - X_4 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_3 = 0, \end{cases}$$

e sia V_2 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_3 + X_4 = 0, \end{cases}$$

(A) Determinare una base di V_1, di V_2 e di $V_1 \cap V_2$.
(B) Calcolare la dimensione di $V_1 + V_2$ usando la formula di Grassmann, e scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana.
(C) Dire se esiste un'applicazione lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^4)$ tale che $\ker \Phi = V_1$ e $\mathrm{Im}\, \Phi = V_2$, e in caso affermativo, si scriva esplicitamente una tale Φ.
(D) Usando l'identificazione canonica $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$, si calcolino $\mathrm{Ann}(V_1)$ e $\mathrm{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana.
(E) Scrivere $\mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2)$ in forma parametrica e $\mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana.

ESERCIZIO 4 (6 punti)
Si consideri l'applicazione lineare $\Theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ la cui matrice canonica è

$$M(\Theta) = B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(A) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(\Theta)$ e un'equazione cartesiana di $\mathrm{Im}(\Theta)$.
(B) Trovare una base del dominio e una base del codominio rispetto alle quali Θ si scrive in forma canonica (rispetto alla relazione di equivalenza).
(C) Usando l'identificazione canoniche $(\mathbb{R}^4)^* \cong \mathbb{R}^4$, si consideri l'applicazione duale $\Theta^* \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$. Calcolare $\mathrm{Ker}(\Theta^*)$ in forma parametrica e $\mathrm{Im}(\Theta^*)$ in forma cartesiana.

ESERCIZIO 5 (6 punti)
Si considerino i seguenti due sottoinsiemi di $\mathbb{Q}^4$:

$$I := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset S := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(A) Dimostrare che I è lineramente indipendente.
(B) Dimostrare che S è generante.
(C) Trovare tutte le basi B di $\mathbb{Q}^4$ tale che $I \subseteq B \subseteq S$.