SOLUZIONI DELL'APPELLO X DEL CORSO GE110
19 SETTEMBRE 2020

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^4$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Si consideri l'operatore lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ univocamente determinato da

$$\begin{cases} \Phi(e_1) = e_2, \\ \Phi(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3 - e_4, \\ \Phi(e_3) = -e_1 + 2e_2 - 2e_3 + e_4, \\ \Phi(e_4) = -3e_1 + 6e_2 - 6e_3 + 3e_4. \end{cases}$$

(A) Dimostrare che 0 è l'unico autovalore di Φ.
(B) Si determinino gli autospazi generalizzati di Φ relativi all'autovalore 0.
(C) Si determini la forma canonica di Jordan di Φ.
(D) Si calcoli il polinomio minimo $\mu_{\Phi,v}$ di Φ rispetto al vettore

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e si determini una base del sottospazio ciclico $\langle \Phi, v \rangle$.
(E) Si determini una base di Jordan, cioè una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ tale che $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ si scrive in forma canonica di Jordan.

Soluzione:
(A) La matrice canonica di Φ è data da

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di Φ è dato da

$$\chi_\Phi(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 1 & 3 \\ -1 & x+1 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & x+2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & x-3 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante della matrice di sopra, effettuiamo le seguenti operazioni elementari sulle righe

$$\begin{pmatrix} x & -1 & 1 & 3 \\ -1 & x+1 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & x+2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & x-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + xR_2} \begin{pmatrix} 0 & x^2+x-1 & -2x+1 & -6x+3 \\ -1 & x+1 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & x+2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & x-3 \end{pmatrix}$$

Le operazioni elementari effettuate non cambiano il determinante. Dunque, facendo lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna, otteniamo che

$$\chi_\Phi(x) = \det\begin{pmatrix} x^2+x-1 & -2x+1 & -6x+3 \\ -2 & x+2 & 6 \\ 1 & -1 & x-3 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante della matrice di sopra, effettuiamo le seguenti operazioni elementari sulle righe

$$\begin{pmatrix} x^2+x-1 & -2x+1 & -6x+3 \\ -2 & x+2 & 6 \\ 1 & -1 & x-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 2R_3]{R_1 \to R_1 - (x^2+x-1)R_3} \begin{pmatrix} 0 & x^2-x & -x^3+2x^2-2x \\ 0 & x & 2x \\ 1 & -1 & x-3 \end{pmatrix}$$

Facendo lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna, otteniamo che

$$\chi_\Phi(x) = \det\begin{pmatrix} x^2-x & -x^3+2x^2-2x \\ x & 2x \end{pmatrix} =$$

$$= 2x(x^2-x) - x(-x^3+2x^2-2x) = x^4.$$

Siccome gli autovalori di Φ sono le radici del suo polinomio caratteristico, otteniamo che 0 è l'unico autovalore di Φ.

(B) Usando che $\mathcal{E}_0^i(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Phi^i) = \mathrm{Sol}_{M(\Phi)^i}$ per ogni $1 \leq i$, e risolvendo i sistemi lineari omogenei, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*):

$$\mathcal{E}_0^1(\Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathcal{E}_0^2(\Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathcal{E}_0^3(\Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si verifica facilmente che i tre sottospazi generalizzati qui sopra sono tutti diversi tra di loro.

(C) Siccome $\chi_\Phi(x) = x^4$, allora la forma canonica di Jordan di Φ sarà della forma $J_{\underline{m}}(0)$ per una certa partizione $\underline{m} = (m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_r \geq 1)$ tale $|\underline{m}| = 4$. Siccome abbiamo calcolato nel punto (B) che $\mathcal{E}_0^2(\Phi) \neq \mathcal{E}_0^3(\Phi) = \mathcal{E}_0^\infty(\Phi)$, allora $m_1 = 3$. Pertanto la forma canonica di Jordan di Φ è $(J_{(3)}(0), J_1(0))$.

(D) Da quanto calcolato nel punto (B), si vede che $v \in \mathcal{E}_0^3(\Phi) \setminus \mathcal{E}_0^2(\Phi)$. Dunque $\mu_{\Phi,v}(x) = x^3$. Dunque una base del sottospazio ciclico $\langle \Phi, v \rangle$ è

$$\left\{ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi^2(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(E) Affinché una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ sia tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = (J_{(1)}(1), J_{(3)}(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

è necessario e sufficiente che $\mathcal{B} = \{z, w, \Phi(w), \Phi^2(w)\}$ con $0 \neq z \in \mathcal{E}_1(\Phi)$ e $w \in \mathcal{E}_0^3(\Phi) \setminus \mathcal{E}_0^2(\Phi)$. Da quanto calcolato nei punti (B) e (D), possiamo scegliere

$$z := \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w := v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e dunque otteniamo che una base di Jordan è data da

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Si consideri l'operatore lineare $\Psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Psi)$ è uguale ad A e l'operatore lineare $\Pi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ la cui matrice canonica $M(\Pi)$ è uguale ad A.

(A) Calcolare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di Ψ e di Π.
(B) Si calcoli la decomposizione primaria di Ψ.
(C) Per ciascun autovalore di Π, si calcolino gli autospazi generalizzati.
(D) Si dica se Ψ e Π sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, trovare delle basi diagonalizzanti.
(E) Si calcolino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $\mu_{\Psi,v}(x) = x(x-1)$ (qualora esistano) e tutti i vettori $w \in \mathbb{C}^4$ tali che $\mu_{\Pi,w}(x) = x^2 + 1$ (qualora esistano).

Soluzione:

(A) I polinomi caratteristici di Ψ e di Π coincidono e sono uguali al polinomio caratteristico della matrice A. Essendo A una matrice diagonale a blocchi, calcoliamo

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & x+2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} x-2 & -5 \\ 1 & x+2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-1)x\,[(x-2)(x+2)+5]\,(x-1)(x+1) = (x-1)x(x^2+1).$$

La decomposizione del polinomio $\chi_A(x)$ in irriducibili è data da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} (x-1)x(x^2+1) & \text{in } \mathbb{R}[x], \\ (x-1)x(x+i)(x-i) & \text{in } \mathbb{C}[x]. \end{cases}$$

Siccome il polimonio minimo di Ψ (risp. Π) divide il suo polinomio caratteristico e ha gli stessi fattori irriducibili, dal fatto che tutti i fattori irriducibili di χ_Ψ (risp. χ_Π) appaiono con molteplicità uno deduciamo che

$$\mu_\Phi = \chi_\Phi \quad \text{e} \quad \mu_\Pi = \chi_\Pi.$$

(B) La decomposizione primaria di Ψ è data da

$$\mathbb{R}^4 = V_\Psi(x^2+1) \oplus^{\text{int}} V_\Psi(x-1) \oplus^{\text{int}} V_\Psi(x) = \ker(\Psi^2 + \text{Id}) \oplus^{\text{int}} \text{Ker}(\Psi - \text{Id}) \oplus^{\text{int}} \text{Ker}(\Psi).$$

Risolvendo gli opportuni sistemi lineari omogenei, troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\ker(\Psi^2+\text{Id}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{Ker}(\Psi-\text{Id}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{Ker}(\Psi) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(C) Gli autovalori di Π sono le radici del polinomio caratteristico e dunque sono $i, -i, 1, 0$. Ciascuno di essi ha molteplicità algebrica 1, e dunque molteplicità geometrica e indice uguali a 1. Ciò implica che, per ciascun autovalore, gli autospazi generalizzati di indice maggiore di uno coincidiono con l'autospazio (di indice uno) il quale ha dimensione uguale a uno. Risolvendo gli opportuni sistemi lineari omogenei (gli ultimi due dei quali sono già stati risolti nel punto (B)), troviamo che (*qua andavano inseriti i conti*)

$$\mathcal{E}_i(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1-i \\ -1+i \\ 2+i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathcal{E}_{-i}(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1+i \\ -1-i \\ 2-i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathcal{E}_1(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathcal{E}_0(\Pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(D) L'operatore $\Psi \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ non è diagonalizzabile in quanto il suo polinomio minimo contiene il fattore irriducibile non lineare x^2+1.

L'operatore $\Pi \in \text{End}(\mathbb{C}^4)$ è diagonalizzabile perchè il suo polinomio minimo è prodotto di fattori irriducibili lineari con molteplicità uno. Una base diagonalizzante $\mathcal{B}$ si ottiene mettendo insieme una base per ciascun autospazio di Π e dunque, per quanto calcolato in (C) abbiamo che

$$\mathcal{B} := \left\langle \begin{pmatrix} 1-i \\ -1+i \\ 2+i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ -1-i \\ 2-i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(E) Per un vettore $w \in \mathbb{C}^4$ vale che

$$\mu_{\Pi,w}(x) | x^2+1 \Leftrightarrow (\Pi^2 + \text{Id})(w) = 0 \Leftrightarrow w \in V_\Pi(x^2+1) = \mathcal{E}_i(\Pi) \oplus^{\text{int}} \mathcal{E}_{-i}(\Pi).$$

I divisori massimali di x^2+1 in $\mathbb{C}[x]$ sono $x-i$ e $x+i$ e vale che

$$\begin{cases} \mu_{\Pi,w}(x) | x-i \Leftrightarrow w \in \mathcal{E}_i(\Pi), \\ \mu_{\Pi,w}(x) | x+i \Leftrightarrow w \in \mathcal{E}_{-i}(\Pi). \end{cases}$$

Da questo deduciamo che

$$\mu_{\Pi,w}(x) = x^2+1 \Leftrightarrow w \in \mathcal{E}_i(\Pi) \oplus^{\text{int}} \mathcal{E}_{-i}(\Pi) \setminus (\mathcal{E}_i(\Pi) \cup \mathcal{E}_{-i}(\Pi)).$$

Similmente per un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ vale che

$$\mu_{\Psi,v}(x) = x(x-1) \Leftrightarrow v \in V_\Psi(x) \oplus^{\text{int}} V_\Psi(x-1) \setminus (V_\Psi(x) \cup V_\Psi(x-1)).$$

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_3 - X_4 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_3 = 0, \end{cases}$$

e sia V_2 il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_3 + X_4 = 0, \end{cases}$$

(A) Determinare una base di V_1, di V_2 e di $V_1 \cap V_2$.
(B) Calcolare la dimensione di $V_1 + V_2$ usando la formula di Grassmann, e scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana.
(C) Dire se esiste un'applicazione lineare $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^4)$ tale che $\ker \Phi = V_1$ e $\mathrm{Im}\, \Phi = V_2$, e in caso affermativo, si scriva esplicitamente una tale Φ.
(D) Usando l'identificazione canonica $(\mathbb{Q}^4)^* \cong \mathbb{Q}^4$, si calcolino $\mathrm{Ann}(V_1)$ e $\mathrm{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana.
(E) Scrivere $\mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2)$ in forma parametrica e $\mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2)$ in forma cartesiana.

Soluzione:

(A) Risolvendo il primo sistema lineare (*qua andavano inseriti i conti*), otteniamo che una base di V_1 è data da

$$\left\{ v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Risolvendo il secondo sistema lineare (*qua andavano inseriti i conti*), otteniamo che una base di V_2 è data da

$$\left\{ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Un'equazione cartesiana per l'intersezione $V_1 \cap V_2$ si ottiene mettendo insieme i sistemi lineari omogenei che definiscono V_1 e V_2. Risolvendo i conti (*qua andavano inseriti i conti*), si ottiene che una base di $V_1 \cap V_2$ è data da

$$\left\{ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(B) Applicando la formula di Grassmann, otteniamo che

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Dunque per trovare una forma cartesiana di $V_1 + V_2$, sarà sufficiente trovare un'equazione non nulla soddisfatta dai generatori di $V_1 + V_2$ che sono $\{v, w, z\}$. Una tale equazione è

$$X_2 - X_4 = 0.$$

(C) Una tale applicazione Φ esiste e può essere costruita nel seguente modo.

Si consideri la base $\{v, w\}$ di V_1 trovata in (A) e si completi ad una base di $\mathbb{Q}^4$, per esempio

$$\mathcal{B} = \{v, w, e_1, e_2\},$$

dove e_i sono gli elementi della base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

Similmente si consideri la base $\{v, z\}$ di V_2 trovata in (A) e si completi ad una base di $\mathbb{Q}^4$, per esempio

$$\mathcal{C} = \{v, z, e_1, e_2\},$$

Ora un'applicazione Φ con le proprietà richieste è quella univocamente determinata da

$$\begin{cases} \Phi(v) = 0, \\ \Phi(w) = 0, \\ \Phi(e_1) = v, \\ \Phi(e_2) = z. \end{cases}$$

In altre parole, la matrice di Φ rispetto alla base $\mathcal{B}$ del dominio e la base $\mathcal{C}$ del codominio è

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(D) Usando la formula

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Span}_A) = \mathrm{Sol}_{A^t}, \tag{0.2}$$

e partendo dalla forma parametriche di V_1 e V_2 ottenute nel punto (A), deduciamo che una forma cartesiana di $\mathrm{Ann}(V_1)$ è data da

$$\begin{cases} X_1 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_4 = 0, \end{cases}$$

mentre una forma cartesiana di $\mathrm{Ann}(V_2)$ è data da

$$\begin{cases} X_1 + X_3 = 0, \\ -X_1 + X_2 + X_4 = 0. \end{cases}$$

(E) Siccome Ann scambia l'intersezione con la somma, abbiamo che

$$\begin{cases} \mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2) = \mathrm{Ann}(V_1 + V_2), \\ \mathrm{Ann}(V_1) + \mathrm{Ann}(V_2) = \mathrm{Ann}(V_1 \cap V_2). \end{cases}$$

Ora usando le formule

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Sol}_A) = \mathrm{Span}_{A^t} \quad \text{e} \quad \mathrm{Ann}(\mathrm{Span}_A) = \mathrm{Sol}_{A^t} \tag{0.3}$$

e le equazioni cartesiane di V_1+V_2 (trovate in (B)) e parametriche di $V_1\cap V_2$ (trovate in (A)), otteniamo che

$$\begin{cases} \mathrm{Ann}(V_1)\cap \mathrm{Ann}(V_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \mathrm{Ann}(V_1)+\mathrm{Ann}(V_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \ : x_1+x_3=0 \right\}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4 (6 punti)
Si consideri l'applicazione lineare $\Theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)$ la cui matrice canonica è

$$M(\Theta)=B:=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(A) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(\Theta)$ e un'equazione cartesiana di $\mathrm{Im}(\Theta)$.
(B) Trovare una base del dominio e una base del codominio rispetto alle quali Θ si scrive in forma canonica (rispetto alla relazione di equivalenza).
(C) Usando l'identificazione canoniche $(\mathbb{R}^4)^* \cong \mathbb{R}^4$, si consideri l'applicazione duale $\Theta^* \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)$. Calcolare $\mathrm{Ker}(\Theta^*)$ in forma parametrica e $\mathrm{Im}(\Theta^*)$ in forma cartesiana.

Soluzione:

(A) Risolvendo il sistema lineare omogeneo con matrice associata $M(\Theta)$ (*qua andavano inseriti i conti*), otteniamo che un base di $\mathrm{Ker}(\Theta)$ è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -3\\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Applicando il teorema di rango-nullità Φ, otteniamo che

$$\dim \mathrm{Im}(\Theta) = \dim \mathbb{Q}^4 - \dim \ker(\Theta) = 4-1=3.$$

Dunque per trovare una forma cartesiana di $\mathrm{Im}(\Theta)$, sarà sufficiente trovare un'equazione non nulla soddisfatta dai generatori di $\mathrm{Im}(\Theta)$ che sono le colonne della matrice $M(\Theta)$. Prendendo un'equazione generica $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\lambda_3X_3+\lambda_4X_4$, imponendo che si annulli sulle colonne della matrice $M(\Theta)$ e risolvendo il sistema nelle incognite λ_i, otteniamo che una tale equazione è

$$\{\, -X_1+X_2+X_4=0.$$

(B) Sia $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

Consideriamo la base $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$ di $\ker(\Theta)$ trovata in (A) ed estendiamola ad una base di $\mathbb{Q}^4$ aggiungendo $\{e_1, e_2, e_3\}$. Ora calcoliamo

$$\Theta(e_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \Theta(e_2) = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \Theta(e_3) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

ed estendiamo questi vettori ad una base di $\mathbb{Q}^4$ aggiungendo e_1. Dunque, se consideriamo le due basi ordinate di $\mathbb{Q}^4$

$$\mathcal{B} := \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} := \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\},$$

abbiamo che

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\Theta) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

che è la forma canonica richiesta.

(C) Dalla teoria e da quanto calcolato in (A), sappiamo che

$$\ker(\Theta^*) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Im}(\Theta)) = \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Sol}_{\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}}\right) = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle.$$

Similmente, abbiamo che

$$\mathrm{Im}(\Theta^*) = \mathrm{Ann}(\ker(\Theta)) = \mathrm{Ann}\left(\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix} \right\rangle\right) = \mathrm{Sol}_{\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix}}.$$

ESERCIZIO 5 (6 punti)

Si considerino i seguenti due sottoinsiemi di $\mathbb{Q}^4$:

$$I := \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}\right\} \subset S := \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

(A) Dimostrare che I è lineramente indipendente.
(B) Dimostrare che S è generante.
(C) Trovare tutte le basi B di $\mathbb{Q}^4$ tale che $I \subseteq B \subseteq S$.

Soluzione:

Consideriamo la matrice i cui vettori colonna sono i vettori di S

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 1 & 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

Effettuiamo l'eliminazione di Gauss per colonne senza cambiare l'ordine delle colonne e cercando di posizionare dei pivots sulla prima e terza colonna che corrispondono ai vettori di I:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 1 & 1 & 4 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[C_5\to C_5-C_1]{\substack{C_3\to C_3+C_1\\ C_4\to C_4-2C_1}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 3 & -3 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 3 & -3 & 2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[C_6\to C_6+C_3]{\substack{C_2\to C_2-C_3\\ C_4\to C_4+C_3}}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{C_6\to C_6-2C_5} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

Da questa eliminazione di Gauss deduciamo le cose seguenti:

(A) I è un insieme linearmente indipendente perché le colonne corrispondenti ai vettori di I hanno tutte un pivot.

(B) S è generante perché ho ottenuto solo 4 pivots e dunque $\dim\langle S\rangle = 4 = \dim \mathbb{Q}^4 \Rightarrow \langle S\rangle = \mathbb{Q}^4$.

(C) Dall'eliminazione di Gauss sopra effettuata, si vede che i vettori di S che compaiono nella seconda e quarta colonna sono nello span di I e dunque non possono comparire in nessuna delle basi B cercate. Dunque l'unica base B che soddisfa le condizioni richieste e':

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\}.$$